Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Vorlesung 21

Polarkoordinaten für $\mathbb{C}$

Satz 21.1. *Die komplexe Exponentialfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Es ist* $e^z = e^{z+2\pi i}$.
(2) *Es ist* $e^z = 1$ *genau dann, wenn* $z = 2\pi i n$ *für ein* $n \in \mathbb{Z}$ *ist.*
(3) *Es ist* $e^z = e^w$ *genau dann, wenn* $z - w = 2\pi i n$ *für ein* $n \in \mathbb{Z}$ *ist.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 15.2, aus Satz 20.9 und aus Satz 14.7. □

Insbesondere gilt also die berühmte Formel

$$e^{2\pi i} = 1 .$$

Aus der *Eulerschen Gleichung*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

kann man ebenso die Gleichung $e^{\pi i} = -1$ bzw. $e^{\pi i} + 1 = 0$ ablesen, die die fünf wichtigsten Zahlen der Mathematik enthält.

Satz 21.2. *Zu jeder komplexen Zahl* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, *gibt es eine eindeutige Darstellung*

$$z = r \cdot \exp(i\varphi) = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$ *und mit* $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Beweis. Wegen Satz 15.2 ist

$$|z| = |r| \left|e^{i\varphi}\right| = |r| = r,$$

d.h. r ist als Betrag der komplexen Zahl z festgelegt. Wir können durch den Betrag teilen und können dann davon ausgehen, dass eine komplexe Zahl $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und mit $a^2 + b^2 = 1$ vorliegt. Es ist dann zu zeigen, dass es eine eindeutige Darstellung

$$z = a + bi = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

gibt. Bei $a = 1$ (bzw. -1) ist $b = 0$ und $\varphi = 0$ (bzw. $\varphi = \pi$) ist die einzige Lösung. Wir zeigen, dass es für ein gegebenes $a \in]-1, 1[$ stets genau zwei Möglichkeiten für φ mit $a = \cos \varphi$ gibt, und eine davon wird durch das Vorzeichen von b ausgeschlossen. Bei $b \geq 0$ gibt es aufgrund von Korollar 20.10 ein eindeutiges $\varphi \in [0, \pi]$ mit $a = \cos \varphi$. Für dieses gilt $b = \sin \varphi$ wegen $a^2 + b^2 = 1$ und $b \geq 0$. Bei $b < 0$ gibt es wiederum ein eindeutiges

$\theta \in [0, \pi]$ mit $a = \cos\theta$. Wegen $\sin\theta \geq 0$ ist dies aber keine Lösung für beide Gleichungen. Stattdessen erfüllt $\varphi := 2\pi - \theta$ beide Gleichungen. $\square$

Die in diesem Satz beschriebene Darstellung für eine komplexe Zahl heißen ihre *Polarkoordinaten.* Zu $z = x + iy$ heißt r der *Betrag* und φ das *Argument* (oder der *Winkel*) von z.

KOROLLAR 21.3. *Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es eine komplexe Zahl w mit*

$$w^n = z\,.$$

Beweis. Bei $z = 0$ ist $w = 0$ eine Lösung, sei also $z \neq 0$. Nach Satz 21.2 gibt es eine Darstellung

$$z = re^{i\varphi}$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$. Es sei $s = r^{1/n}$ die reelle n-te Wurzel von r, die nach Satz 13.5 existiert. Wir setzen

$$w = se^{\frac{i\varphi}{n}}\,.$$

Dann ist nach Satz 14.7

$$w^n = (se^{\frac{i\varphi}{n}})^n = s^n(e^{\frac{i\varphi}{n}})^n = re^{n\frac{i\varphi}{n}} = re^{i\varphi} = z.$$

$\square$

Diese letzte Aussage besagt, dass jedes Polynom der Form $X^n - z$ in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Insofern handelt es sich dabei um eine Vorstufe für den Fundamentalsatz der Algebra.

Abbildungsverzeichnis