Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Vorkurs Mathematik

Vorlesung 3

Die rationalen Zahlen

Definition 3.1. Unter einer *rationalen Zahl* versteht man einen Ausdruck der Form

$$\frac{a}{b},$$

wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ sind, und wobei zwei Ausdrücke $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ genau dann als gleich betrachtet werden, wenn $ad = bc$ (in $\mathbb{Z}$) gilt. Die Menge aller rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Bei $\frac{a}{b}$ heißt a der *Zähler* und b der *Nenner* der rationalen Zahl. Für die rationale Zahl $\frac{a}{1}$ schreibt man einfach a. In diesem Sinne sind ganze Zahlen insbesondere auch rationale Zahlen. Es gelten die folgenden Identitäten (dabei seien $c, d \neq 0$, ansonsten seien alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ beliebig).

(1)
$$\frac{1}{-1} = -1,$$

(2)
$$\frac{0}{c} = 0,$$

(3)
$$\frac{c}{c} = 1,$$

(4)
$$\frac{a}{c} = \frac{ad}{cd}.$$

Die Addition und die Multiplikation auf rationalen Zahlen wird folgendermaßen festgelegt.

(1)
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} := \frac{ab}{cd},$$

(2)
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} := \frac{ad + bc}{cd}.$$

Man addiert also zwei rationale Zahlen, indem man die Nenner gleichnamig macht. Diese Operationen sind wieder assoziativ, kommutativ und es gilt das Distributivgesetz. Diese Eigenschaften kann man auf die entsprechenden Eigenschaften der ganzen Zahlen zurückführen, siehe Aufgabe 3.1.

Die $0 = \frac{0}{1}$ hat wieder die Eigenschaft

$$0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

und die $1 = \frac{1}{1}$ hat wieder die Eigenschaft

$$1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Ferner gibt es wieder zu einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ die negative Zahl $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$. Sie besitzt die charakteristische Eigenschaft

$$\frac{-a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{-a+a}{b} = 0.$$

Zu einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ mit $a, b \neq 0$ (also wenn Zähler und Nenner von 0 verschieden sind), so ist auch der umgedrehte Bruch $\frac{b}{a}$ eine rationale Zahl, und es gilt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

Man nennt $\frac{b}{a}$ die *inverse rationale Zahl* zu $\frac{a}{b}$.

Man kann die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden platzieren (die ganzen Zahlen seien dort schon platziert). Die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}_+$ findet man so: Man unterteilt die Strecke von 0 nach a in b gleichlange Teilstrecken. Die Zahl $\frac{a}{b}$ ist dann die rechte Grenze des (von links) ersten Teilintervalls. Insbesondere ist $\frac{1}{b}$ die Länge des Intervalls, dass b-fach nebeneinander gelegt die Einheitsstrecke (oder das Einheitsintervall) ergibt.[1]

Als Punkte auf der Zahlengeraden lassen sich rationale Zahlen ihrer Größe nach vergleichen. Dabei gilt für $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}_+$ die Beziehung

$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$$

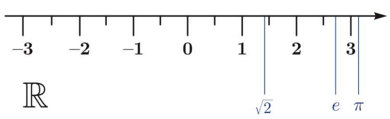
genau dann, wenn in $\mathbb{Z}$ die Beziehung

$$ad \geq bc$$

gilt. Um dies einzusehen, bringt man die beiden rationalen Zahlen auf den Hauptnenner, d.h. man vergleicht $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{cb}{bd}$. Die Größerbeziehung hängt dann allein von den beiden Zählern ab.

Die reellen Zahlen

[1] Die Frage, wie man diese Unterteilung elementar durchführt, besprechen wir hier nicht.



Wir werden nun die reellen Zahlen besprechen, die wir uns durch alle Punkte des Zahlenstrahls vorstellen. Diese Vorstellung ist keineswegs unproblematisch, sie ist aber intuitiv sehr wertvoll. Allerdings ist die Intuition in der Mathematik kein Beweismittel. Ferner wird die Intuition häufig überschätzt und mit Gewohnheit verwechselt. Haben Sie eine sichere intuitive Vorstellung zur Multiplikation auf der Zahlengeraden?

Unsere Vorgehensweise ist daher, grundlegende Eigenschaften der reellen Zahlen ein für allemal zu formulieren und dann alle weiteren Eigenschaften aus diesen Grundeigenschaften abzuleiten. Diese grundlegenden Eigenschaften decken sich mit unserer intuitiven Vorstellung einer kontinuierlichen Zahlengeraden und mit unserer Rechenerfahrung mit reellen Zahlen.

Grundlegende Eigenschaften von mathematischen Strukuren werden als *Axiome* bezeichnet. In der Mathematik werden sämtliche Eigenschaften aus den Axiomen logisch abgeleitet. Die Axiome für die reellen Zahlen gliedern sich in algebraische Axiome, Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Unter algebraischen Eigenschaften versteht man solche Eigenschaften, die sich auf die Rechenoperationen, also die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division, beziehen. Diese Operationen ordnen zwei reellen Zahlen eine weitere reelle Zahl zu, man spricht auch von *Verknüpfungen*. Es genügt, nur Gesetzmäßigkeiten für die Addition und die Multiplikation aufzulisten, Subtraktion und Division ergeben sich als abgeleitete Operationen. Die Existenz der Addition und der Multiplikation ist Teil der Axiome.

Proposition 3.2. *Die Addition und die Multiplikation auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllen die folgenden Eigenschaften (bzw. Axiome).*

(1) *Axiome der Addition*
   - (a) *Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.*
   - (b) *Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a + b = b + a$.*
   - (c) *0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $a + 0 = a$.*
   - (d) *Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein Element $b \in \mathbb{R}$ mit $a + b = 0$.*

(2) *Axiome der Multiplikation*
   - (a) *Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.*
   - (b) *Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.*
   - (c) *1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $a \cdot 1 = a$.*

(d) *Existenz des Inversen: Zu jedem* $a \in \mathbb{R}$ *mit* $a \neq 0$ *gibt es ein Element* $c \in \mathbb{R}$ *mit* $a \cdot c = 1$.

(3) *Distributivgesetz: Für alle* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *gilt* $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Dass all diese Axiome für die reellen Zahlen (und die rationalen Zahlen) mit den natürlichen Verknüpfungen gelten, ist aus der Schule vertraut.

Zur Vereinfachung der Schreibweisen verwenden wir die *Klammerkonvention*, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Man kann daher $a \cdot b + c \cdot d$ statt $(a \cdot b) + (c \cdot d)$ schreiben. Zur weiteren Notationsvereinfachung wird das Produktzeichen häufig weggelassen. Die Elemente 0 und 1 werden als *Nullelement* und als *Einselement* bezeichnet.

Zu einer reellen Zahl a nennt man das Element b mit $a + b = 0$ das *Negative* von a und bezeichnet es mit $-a$. Es ist $-(-a) = a$, da wegen $a + (-a) = 0$ das Element a gleich dem (eindeutig bestimmten) Negativen von $-a$ ist.

Statt $b + (-a)$ schreibt man abkürzend $b - a$ und spricht von der *Differenz*. Die Differenz ist also keine grundlegende Verknüpfung, sondern wird auf die Addition mit dem Negativen zurückgeführt.

Zu einer reellen Zahl a, $a \neq 0$, nennt man das Element c mit $ac = 1$ das *Inverse* von a und bezeichnet es mit a^{-1}. Für $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, schreibt man auch abkürzend

$$a/b := \frac{a}{b} := ab^{-1}.$$

Die beiden linken Ausdrücke sind also Abkürzungen für den rechten Ausdruck.

Zu einer reellen Zahl a und $n \in \mathbb{N}$ wird a^n als das n-fache Produkt von a mit sich selbst definiert, und bei $a \neq 0$ wird a^{-n} als $(a^{-1})^n$ interpretiert.

Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen

Bekanntlich kann man die reellen Zahlen mit einer Geraden identifizieren. Auf dem Zahlenstrahl liegen von zwei Punkten einer weiter rechts als der andere, was bedeutet, dass sein Wert größer ist. Wir besprechen nun diese Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen.

Axiom 3.3. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllen die folgenden *Anordnungsaxiome*.

(1) Für je zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist entweder $a > b$ oder $a = b$ oder $b > a$.
(2) Aus $a \geq b$ und $b \geq c$ folgt $a \geq c$ (für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$).
(3) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$).
(4) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$).
(5) Für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $n \geq a$.

Archimedes (ca. 287 -212 v. C.)

Die ersten beiden Eigenschaften drücken aus, dass auf $\mathbb{R}$ eine *totale* (oder *lineare*) *Ordnung* vorliegt; die in (2) beschriebene Eigenschaft heißt Transitivität. Die fünfte Eigenschaft heißt *Archimedes-Axiom*.

Statt $a \geq b$ schreibt man auch $b \leq a$. Die Schreibweise $a > b$ bedeutet $a \geq b$ und $a \neq b$. Eine wichtige Beziehung in $\mathbb{R}$ ist, dass $a \geq b$ äquivalent[2] zu $a - b \geq 0$ ist. Diese Äquivalenz ergibt sich durch beidseitiges Addieren von $-b$ bzw. b aus dem dritten Axiom. Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennt man *positiv*, wenn $a > 0$ ist, und *negativ*, wenn $a < 0$ ist. Die 0 ist demnach weder positiv noch negativ, und jedes Element ist entweder positiv oder negativ oder null. Die Elemente a mit $a \geq 0$ nennt man dann einfach *nichtnegativ* und die Elemente a mit $a \leq 0$ *nichtpositiv*. Für die entsprechenden Teilmengen der reellen Zahlen schreibt man

$$\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_-,\ \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_+^0,\ \mathbb{R}_{\leq 0} = \mathbb{R}_-^0$$

oder Ähnliches.

Lemma 3.4. *Für reelle Zahlen gelten die folgenden Eigenschaften.*

(1) $1 > 0$.
(2) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \geq 0$ *folgt* $ac \geq bc$.
(3) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \leq 0$ *folgt* $ac \leq bc$.
(4) *Es ist* $a^2 \geq 0$.
(5) *Aus* $a \geq b \geq 0$ *folgt* $a^n \geq b^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
(6) *Aus* $a \geq 1$ *folgt* $a^n \geq a^m$ *für ganze Zahlen* $n \geq m$.
(7) *Aus* $a > 0$ *folgt* $\frac{1}{a} > 0$.
(8) *Aus* $a > b > 0$ *folgt* $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

[2] Man sagt, dass zwei Aussagen A und B zueinander *äquivalent* sind, wenn die Aussage A genau dann wahr ist, wenn die Aussage B wahr ist. Dabei sind die beiden Aussagen häufig abhängig von gewissen Variablenbelegungen, und die Äquivalenz bedeutet dann, dass $A(x)$ genau dann wahr ist, wenn $B(x)$ wahr ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 3.11. □

Das folgende Lemma fasst Folgerungen aus dem Archimedes-Axiom zusammen.

LEMMA 3.5. (1) *Zu $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.*

(2) *Zu $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{1}{n} < x$.*

(3) *Zu zwei reellen Zahlen $x < y$ gibt es auch eine rationale Zahl n/k (mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_+$) mit*

$$x < \frac{n}{k} < y\,.$$

Beweis. (1). Wir betrachten y/x. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es ein n mit $n > y/x$. Da x positiv ist, gilt nach Lemma 3.4 (2) auch $nx > y$.
(2). Es ist x^{-1} eine wohldefinierte, nach Lemma 3.4 (7) positive reelle Zahl. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x^{-1}$. Dies ist nach Lemma 3.4 (8) äquivalent zu

$$\frac{1}{n} = n^{-1} < (x^{-1})^{-1} = x.$$

(3). Wegen $y > x$ ist $y - x > 0$ und daher gibt es nach (2) ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit $\frac{1}{k} < y - x$. Wegen (1) gibt es auch ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $n'\frac{1}{k} > x$. Wegen der Archimedes-Eigenschaft gibt es ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{n} \geq -xk$. Nach Lemma 3.4 (3) gilt daher $(-\tilde{n})\frac{1}{k} \leq x$. Daher gibt es auch ein $n \in \mathbb{Z}$ derart, dass

$$n\frac{1}{k} > x \text{ und } (n-1)\frac{1}{k} \leq x$$

ist. Damit ist einerseits $x < \frac{n}{k}$ und andererseits

$$\frac{n}{k} = \frac{n-1}{k} + \frac{1}{k} < x + y - x = y$$

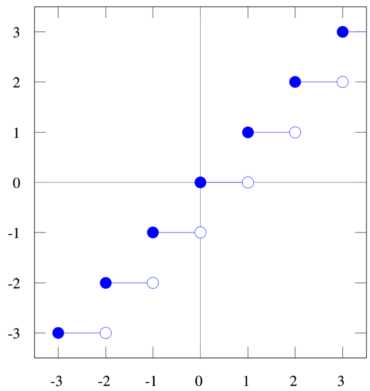
wie gewünscht. □

DEFINITION 3.6. Für reelle Zahlen a, b, $a \leq b$, nennt man

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq a \text{ und } x \leq b\}$ das *abgeschlossene Intervall*.
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | \, x > a \text{ und } x < b\}$ das *offene Intervall*.
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \, x > a \text{ und } x \leq b\}$ das *linksseitig offene Intervall*.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq a \text{ und } x < b\}$ das *rechtsseitig offene Intervall*.

Für das offene Intervall wird häufig auch (a, b) geschrieben. Die Zahlen a und b heißen die *Grenzen des Intervalls* (oder *Randpunkte* des Intervalls), genauer spricht man von *unterer* und *oberer Grenze*. Die Bezeichnung linksseitig und rechtsseitig bei den beiden letzten Intervallen (die man auch als *halboffen* bezeichnet) rühren von der üblichen Repräsentierung der reellen Zahlen als Zahlengerade her, bei der rechts die positiven Zahlen stehen. Manchmal werden auch Schreibweisen wie (a, ∞) verwendet. Dies bedeutet *nicht*, dass es in $\mathbb{R}$ ein Element ∞ gibt, sondern ist lediglich eine kurze Schreibweise für $\{x \in \mathbb{R} | \, x > a\}$.

Für die reellen Zahlen bilden die ganzzahligen Intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, eine disjunkte *Überdeckung*. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll.



Definition 3.7. Die *Gaußklammer* ist die Funktion

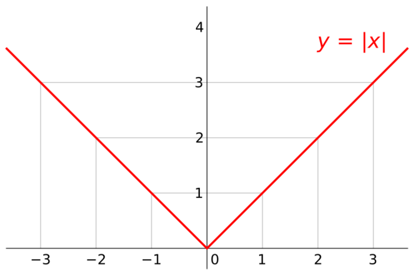
$$\lfloor \, \rfloor : \, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto \lfloor x \rfloor,$$

die durch

$$\lfloor x \rfloor = n, \text{ falls } x \in [n, n+1[\text{ und } n \in \mathbb{Z}\,,$$

definiert wird.

Der Betrag



Definition 3.8. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist der *Betrag* folgendermaßen definiert.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ falls } x \geq 0 \\ -x \text{ falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Der Betrag ist also nie negativ und hat nur bei $x = 0$ den Wert 0, sonst ist er immer positiv. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|\,,$$

nennt man auch *Betragsfunktion*. Der Funktionsgraph setzt sich aus zwei Halbgeraden zusammen; eine solche Funktion nennt man auch *stückweise linear*.

Lemma 3.9. *Die reelle Betragsfunktion*

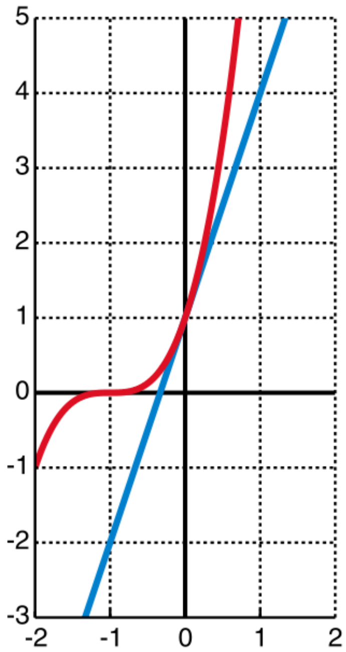
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|\,,$$

erfüllt folgende Eigenschaften (dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$ *ist.*
(3) $|x| = |y|$ *genau dann, wenn* $x = y$ *oder* $x = -y$ *ist.*
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) *Für* $x \neq 0$ *ist* $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) *Es ist* $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(*Dreiecksungleichung für den Betrag*).*

Beweis. Siehe Aufgabe 3.14. □

Bernoullische Ungleichung



Die Bernoullische Ungleichung für $n = 3$.

Die folgende Aussage heißt *Bernoulli Ungleichung.*

Satz 3.10. *Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und eine natürliche Zahl n gilt die Abschätzung*

$$(1+x)^n \geq 1+nx\,.$$

Beweis. Wir führen Induktion über n. Bei $n=0$ steht beidseitig 1, so dass die Aussage gilt. Sei nun die Aussage für n bereits bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

□