

Mathematik für Anwender I**Arbeitsblatt 17****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 17.1. Berechne die ersten fünf Glieder des Cauchy-Produkts der beiden konvergenten Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

AUFGABE 17.2. Man mache sich klar, dass die Partialsummen des Cauchy-Produkts von zwei Reihen nicht das Produkt der Partialsummen der beiden Reihen sind.

AUFGABE 17.3. Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei absolut konvergente Potenzreihen in $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{mit} \quad c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

gegeben ist.

AUFGABE 17.4. Sei $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$. Bestimme (in Abhängigkeit von x) die Summen der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}.$$

AUFGABE 17.5. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 in der dritten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^3.$$

AUFGABE 17.6. Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \exp x,$$

nicht nach oben beschränkt ist und dass 0 das Infimum (aber nicht das Minimum) der Bildmenge ist.¹

AUFGABE 17.7. Zeige, dass für die Exponentialfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto a^x,$$

die folgenden Rechenregeln gelten (dabei seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $x, y \in \mathbb{R}$).

- (1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
- (2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
- (3) $(a^x)^y = a^{xy}$.
- (4) $(ab)^x = a^x b^x$.

AUFGABE 17.8. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis b die folgenden Rechenregeln erfüllen.

- (1) Es ist $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b(y)} = y$, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b .
- (2) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
- (3) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.
- (4) Es gilt

$$\log_a y = \log_a(b^{\log_b y}) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

AUFGABE 17.9. Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 17.10. (3 Punkte)

Berechne die Koeffizienten c_0, c_1, \dots, c_5 der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, die das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe ist.

¹Aus der Stetigkeit folgt daraus, dass \mathbb{R}_+ das Bild der reellen Exponentialfunktion ist.

AUFGABE 17.11. (4 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5$ in der vierten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^4.$$

AUFGABE 17.12. (5 Punkte)

Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$R_{N+1}(x) = \exp x - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

das *Restglied* der Exponentialreihe. Zeige, dass für $|x| \leq 1 + \frac{1}{2}N$ die *Restgliedabschätzung*

$$|R_{N+1}(x)| \leq \frac{2}{(N+1)!} |x|^{N+1}$$

gilt.

AUFGABE 17.13. (3 Punkte)

Berechne von Hand die ersten 4 Nachkommastellen im Zehnersystem von

$$\exp 1.$$

AUFGABE 17.14. (4 Punkte)

Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Exponentialfunktion die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Folge

$$\left(\frac{\exp n}{n^d} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.²

²Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion *schneller wächst* als jede Polynomfunktion.

AUFGABE 17.15. (6 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ gibt mit $f(x) = b^x$.