Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Vorlesung 16

Die trigonometrischen Reihen

Definition 16.1. Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu z.

Durch Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich sofort, dass diese beiden Reihen für jedes z absolut konvergieren. Die zugehörigen Funktionen

$$\cos\, z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \text{ und } \sin\, z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Sinus* und *Kosinus*. Beide Funktionen stehen unmittelbar in Zusammenhang mit der Exponentialfunktion, wobei man allerdings die komplexen Zahlen braucht, um diesen Zusammenhang zu erkennen.

Satz 16.2. *Die Funktionen*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \cos\, z\,,$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin\, z\,,$$

besitzen für $z, w \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften.

(1) *Für $z = x + iy$ ist*

$$\exp\, z = (\exp\, x)(\cos\, y + i \sin\, y)\,.$$

(2) *Es ist* $\cos\, 0 = 1$ *und* $\sin\, 0 = 0$.
(3) *Es ist* $\cos\, (-z) = \cos\, z$ *und* $\sin\, (-z) = -\sin\, z\,.$
(4) *Es ist*

$$\cos\, z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

und

$$\sin\, z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\,.$$

(5) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\cos(z+w) = \cos z \ \cos w - \sin z \ \sin w \,.$$

und

$$\sin(z+w) = \sin z \ \cos w + \cos z \ \sin w \,.$$

(6) *Es gilt*

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1\,.$$

Beweis. (1). Aufgrund von Satz 14.7 gilt

$$\exp(x+iy) = \exp x \cdot \exp(iy),$$

so dass wir nur noch den hinteren Faktor betrachten müssen. Da man absolut konvergente Reihen beliebig sortieren darf, gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos y + i \ \sin y\,.
\end{aligned}$$

(2) und (3) folgen direkt aus der Definition der Reihen. (4) folgt aus (1) und (3). (5). Es ist

$$\begin{aligned}
\cos(z+w) &= \frac{\exp(i(z+w)) + \exp(-i(z+w))}{2} \\
&= \frac{\exp(iz)\exp(iw) + \exp(-iz)\exp(-iw)}{2} \\
&= \frac{1}{2}((\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w) \\
&\quad +(\cos z - i \sin z)(\cos w - i \sin w)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos z \ \cos w \\
&\quad +i(\cos z \ \sin w + \sin z \ \cos w) - \sin z \ \sin w \\
&\quad + \cos z \ \cos w \\
&\quad -i(\cos z \ \sin w + \sin z \ \cos w) \\
&\quad - \sin z \ \sin w) \\
&= \cos z \ \cos w - \sin z \ \sin w\,.
\end{aligned}$$

Das Additionstheorem für den Sinus folgt ähnlich. (6). Aus dem Additionstheorem für den Kosinus angewendet auf $w = -z$ und aufgrund von (2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
1 &= \cos 0 \\
&= \cos(z-z) \\
&= \cos z \cos(-z) - \sin z \sin(-z)
\end{aligned}$$

$$= \cos z \ \cos z + \sin z \ \sin z \,.$$

□

Für reelle z sind $\sin z$ und $\cos z$ wieder reell, wie unmittelbar aus der Potenzreihendarstellung folgt. Die letzte Aussage im vorstehenden Satz besagt, dass für reelles z das Paar $(\cos z\,, \sin z)$ ein Punkt auf dem *Einheitskreis* $\{(x,y) |\, x^2 + y^2 = 1\}$ ist. Wir werden später sehen, dass sich jeder Punkt des Einheitskreises als $(\cos z\,, \sin z)$ schreiben lässt, wobei man z als Winkel interpretieren kann. Dabei tritt die Periode 2π auf, wobei wir die *Kreiszahl* π eben über die trigonometrischen Funktionen einführen werden.

Summierbarkeit

Bei einer Reihe sind die aufzusummierenden Glieder durch die natürlichen Zahlen geordnet. Häufig kommt es vor, dass diese Ordnung verändert wird. Dafür ist es sinnvoll, einen Summationsbegriff zu besitzen, der unabhängig von jeder Ordnung der Indexmenge ist. Wir werden diese Theorie nicht systematisch entwickeln, sondern nur den großen Umordnungssatz beweisen, den wir sogleich für das Entwickeln einer Potenzreihen in einem neuen Entwicklungspunkt benötigen. Die Familie sei als a_i , $i \in I$ gegeben. Für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ kann man die zugehörigen Glieder aufsummieren, und wir setzen

$$a_E = \sum_{i \in E} a_i .$$

Eine sinnvolle Aufsummierung der gesamten Familie muss auf diese endlichen Teilsummen a_E Bezug nehmen.

Definition 16.3. Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Diese Familie heißt *summierbar*, wenn es ein $s \in \mathbb{C}$ gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart, dass für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$ die Beziehung

$$|a_E - s| \leq \epsilon$$

gilt. Dabei ist $a_E = \sum_{i \in E} a_i$. Im summierbaren Fall heißt s die *Summe* der Familie.

Definition 16.4. Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Diese Familie heißt eine *Cauchy-Familie*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart gibt, dass für jede endliche Teilmenge $D \subseteq I$ mit $E_0 \cap D = \emptyset$ die Beziehung

$$|a_D| \leq \epsilon$$

gilt. Dabei ist $a_D = \sum_{i \in D} a_i$.

Lemma 16.5. *Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Dann ist die Familie genau dann summierbar, wenn sie eine Cauchy-Familie ist.*

Beweis. Sei zunächst die Familie summierbar mit der Summe s, und sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\epsilon/2$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart, dass für alle endlichen Mengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$ die Abschätzung $|a_E - s| \leq \epsilon/2$ gilt. Für jede zu E_0 disjunkte endliche Teilmenge D gilt dann

$$\begin{aligned} |a_D| &= |a_D + a_{E_0} - s - a_{E_0} + s| \\ &\leq |a_D + a_{E_0} - s| + |a_{E_0} - s| \\ &= \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

so dass die Cauchy-Bedingung erfüllt ist. Sei nun a_i , $i \in I$, eine Cauchy-Familie. Wir brauchen zunächst einen Kandidaten für die Summe. Für jedes $n \in N_+$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_n \subseteq I$ derart, dass für jede endliche Teilmenge $D \subseteq I$ mit $E_n \cap D = \emptyset$ die Abschätzung $|a_D| \leq 1/n$ gilt. Wir können annehmen, dass $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle n gilt. Wir setzen

$$x_n := a_{E_n} = \sum_{i \in E_n} a_i .$$

Für $k \geq m \geq n$ gilt

$$|x_k - x_m| = \left| \sum_{i \in E_k} a_i - \sum_{i \in E_m} a_i \right| = \left| a_{E_k \setminus E_m} \right| \leq 1/m \leq 1/n,$$

da die Menge $E_k \setminus E_m$ disjunkt zu E_m ist. Daher ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und somit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ konvergent gegen ein $s \in \mathbb{C}$. Wir behaupten, dass die Familie summierbar ist mit der Summe s. Sei dazu ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt $n \in \mathbb{N}_+$ mit $1/n \leq \epsilon/2$. Dann ist wegen der Folgenkonvergenz $|x_n - s| \leq \epsilon/2$. Für jedes endliche $E \supseteq E_n$ schreiben wir $E = E_n \cup D$ mit $E_n \cap D = \emptyset$. Damit gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |a_E - s| &= |a_{E_n} + a_D - s| \\ &\leq |a_{E_n} - s| + |a_D| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Korollar 16.6. *Es sei a_i , $i \in I$, eine summierbare Familie komplexer Zahlen und $J \subseteq I$ eine Teilmenge. Dann ist auch a_i , $i \in J$, summierbar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.3. □

Der große Umordnungssatz

SATZ 16.7. *Es sei a_i , $i \in I$, eine summierbare Familie von komplexen Zahlen mit der Summe s. Es sei J eine weitere Indexmenge und zu jedem $j \in J$ sei eine Teilmenge $I_j \subseteq I$ gegeben mit $\bigcup_{j \in J} I_j = I$ und $I_j \cap I_{j'} = \emptyset$ für $j \neq j'$.*[1] *Dann sind die Teilfamilien a_i , $i \in I_j$, summierbar und für ihre Summen $s_j = \sum_{i \in I_j} a_i$ gilt, dass die Familie s_j , $j \in J$, summierbar ist mit*

$$s = \sum_{j \in J} s_j \, .$$

Beweis. Die Summierbarkeit der Teilfamilien folgt aus Korollar 16.6. Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da die Ausgangsfamilie summierbar ist, gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ mit

$$|a_E - s| \leq \epsilon/2$$

für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$. Es gibt eine endliche Teilmenge $F_0 \subseteq J$ derart, dass

$$E_0 \subseteq \bigcup_{j \in F_0} I_j$$

ist. Wir behaupten, dass dieses F_0 für die Familie s_j , $j \in J$, die Summationseigenschaft für ϵ erfüllt. Sei dazu $F \subseteq J$ mit $F_0 \subseteq F$ endlich und $n = \#(F)$. Da die Familien a_i , $i \in I_j$, summierbar sind mit den Summen s_j, gibt es für jedes $j \in F$ ein endliches $G_{j,0} \subseteq I_j$ mit

$$\left| a_{G_j} - s_j \right| \leq \epsilon/2n$$

für alle endlichen $G_j \subseteq I_j$ mit $G_{j,0} \subseteq G_j$. Wir wählen nun für jedes $j \in F$ ein solches G_j so, dass zusätzlich $E_0 \cap I_j \subseteq G_j$ gilt. Dann ist $E_0 \subseteq E := \bigcup_{j \in F} G_j$ und daher $\left| \sum_{j \in F} a_{G_j} - s \right| = \left| \sum_{i \in E} a_i - s \right| \leq \epsilon/2$. Somit haben wir insgesamt die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j \in F} s_j - s \right| &= \left| \sum_{j \in F} (s_j - a_{G_j}) + \sum_{j \in F} a_{G_j} - s \right| \\
&\leq \sum_{j \in F} \left| s_j - a_{G_j} \right| + \left| \sum_{j \in F} a_{G_j} - s \right| \\
&\leq n \cdot \epsilon/2n + \left| \sum_{i \in E} a_i - s \right| \\
&\leq n \cdot \epsilon/2n + \epsilon/2 \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

□

[1] D.h. die I_j bilden eine disjunkte Vereinigung von I.

Der Entwicklungssatz für Potenzreihen

Satz 16.8. *Es sei*
$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$
eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$ und sei $b \in U(a,R)$. Dann gibt es eine konvergente Potenzreihe
$$h = \sum_{i=0}^{\infty} d_i (z-b)^i$$
mit Entwicklungspunkt b und mit einem Konvergenzradius $s \geq R - |a-b| > 0$ derart, dass die durch diese beiden Potenzreihen dargestellten Funktionen auf $U(b,s)$ übereinstimmen. Die Koeffizienten von h sind
$$d_i = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} c_n (b-a)^{n-i}$$
und insbesondere ist
$$d_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (b-a)^{n-1}.$$

Beweis. Zur Notationsvereinfachung sei $a = 0$, $b \in U(0,R)$ und $z \in U(b, R-|b|)$. Wir betrachten die Familie
$$x_{ni} = c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i},\ n \in \mathbb{N},\ i \in \{0, \ldots, n\}.$$
Wir zeigen zuerst, dass diese Familie summierbar ist. Dies folgt aus der Abschätzung (unter Verwendung von Aufgabe 16.9)
$$\begin{aligned} \sum_{n=0,\ldots,N,\, i=0,\ldots,n} \left| c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \right| &\leq \sum_{n=0}^{N} |c_n| \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} |z-b|^i \, |b|^{n-i} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N} |c_n| \left(|z-b| + |b| \right)^n \end{aligned}$$
und daraus, dass wegen $|z-b| + |b| < R$ die rechte Seite für beliebiges N beschränkt ist. Wegen der Summierbarkeit gelten aufgrund des großen Umordnungssatzes die Gleichungen
$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n ((z-b)+b)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n\in\mathbb{N},\, i=0,\ldots,n} c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} c_n b^{n-i} \right) (z-b)^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} d_i (z-b)^i.
\end{aligned}
$$

$\square$

Abbildungsverzeichnis