Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 25

Übungsaufgaben

Aufgabe 25.1. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx \, .$$

In den folgenden Aufgaben, bei denen es um die Bestimmung von Stammfunktionen geht, ist jeweils ein geeigneter Definitionsbereich zu wählen.

Aufgabe 25.2. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\tan x \, .$$

Aufgabe 25.3. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^n \cdot \ln x \, .$$

Aufgabe 25.4. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^{\sqrt{x}} \, .$$

Aufgabe 25.5. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2}} \, .$$

Aufgabe 25.6. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, .$$

Aufgabe 25.7. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^3 \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x \, .$$

Aufgabe 25.8. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\arcsin x \, .$$

Aufgabe 25.9. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1+3\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt{x-2}}\,.$$

Aufgabe 25.10. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$(\ln(1+\sin x))\cdot\sin x\ .$$

Aufgabe 25.11. Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F. Es sei G eine Stammfunktion von F und es seien $b,c\in\mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$(bt+c)\cdot f(t)$$

Aufgabe 25.12. Sei $n\in\mathbb{N}_+$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+,\ x\longmapsto x^{1/n},$$

unter Verwendung der Stammfunktion von x^n und Korollar 25.5.

Aufgabe 25.13. Bestimme eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus unter Verwendung der Stammfunktion seiner Umkehrfunktion.

Aufgabe 25.14.*

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt[3]{5x+1}}dx\,.$$

Aufgabe 25.15.*

Berechne durch geeignete Substitutionen eine Stammfunktion zu

$$\sqrt{3x^2+5x-4}\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.16. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\sin(\ln x)\ .$$

Aufgabe 25.17. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^x \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,.$$

Aufgabe 25.18. (4 Punkte)

Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F. Es sei G eine Stammfunktion von F und H eine Stammfunktion von G. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$(at^2 + bt + c) \cdot f(t)$$

Aufgabe 25.19. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon\, [c,d] \longrightarrow [a,b]$$

eine streng wachsende, bijektive Funktion und

$$f\colon\, [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion.

a) Zeige, dass $f \circ \varphi$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

b) Sei nun φ zusätzlich differenzierbar. Bestätige die Gleichung

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^d f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds$$

direkt, ohne Bezug auf die Substitutionsregel.

Aufgabe 25.20. (5 Punkte)

Sei

$$g\colon\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Betrachte die Funktion

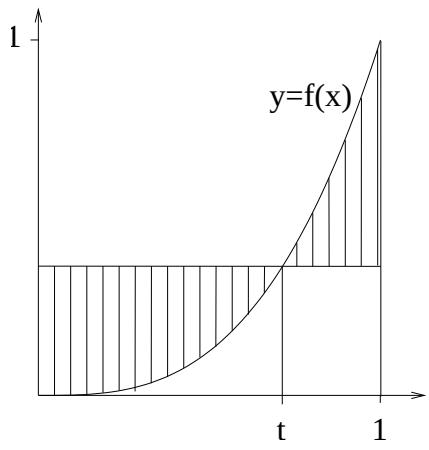
$$f(x) = \int_0^x \sin(t) g(x-t) dt,\; x \in \mathbb{R}\,.$$

Zeige, dass f eine zweite Ableitung besitzt, und dass die folgende Beziehung gilt:

$$f'' + f = g\,.$$

(Mit einer geeigneten Substitution kann man erreichen, dass die Variable x nicht mehr als Argument der Funktion g auftritt. Danach geht es darum, geeignete trigonometrische Formeln anzuwenden.)

Aufgabe 25.21. (5 Punkte)



Es sei

$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$. Für welche Punkte $t \in [0,1]$ besitzt der Flächeninhalt der schraffierten Fläche ein lokales Extremum? Handelt es sich dabei um ein Minimum oder um ein Maximum?

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Funktion.Flaechenvariation.png , Autor = M. Gausmann, Lizenz = CC-by-sa 3.0 4