Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück WS 2010/2011

Mathematik III

Vorlesung 67

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel zusammen, um auf den Borel-Mengen des $\mathbb{R}^n$ ein Maß zu definieren, dass für einen Quader, dessen Seiten reelle Intervalle sind, einfach das Produkt der Seitenlängen ist. Dieses Maß heißt *Borel-Lebesgue-Maß*. Wir beginnen mit der eindimensionalen Situation.

Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

Das Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.

LEMMA 67.1. *Das Mengensystem aller Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$, die sich als eine endliche (disjunkte) Vereinigung von halboffenen Intervallen $[a, b[$ schreiben lassen, ist ein Mengen-Präring.*

Beweis. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich genau dann als eine endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen schreiben, wenn dies mit endlich vielen disjunkten halboffenen Teilmengen möglich ist, siehe Aufgabe 67.9. Die leere Menge ist das halboffene Interall $[a, a[$ (bzw. die leere Vereinigung). Die Abgeschlossenheit unter Vereinigungen ist klar. Sei $V = I_1 \cup \ldots \cup I_m$ und $W = J_1 \cup \ldots \cup J_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} V \setminus W &= (I_1 \cup \ldots \cup I_m) \setminus (J_1 \cup \ldots \cup J_n) \\ &= (I_1 \setminus (J_1 \cup \ldots \cup J_n)) \cup \ldots \cup (I_m \setminus (J_1 \cup \ldots \cup J_n)) \\ &= ((I_1 \setminus J_1) \setminus (J_2 \cup \ldots \cup J_n)) \cup \ldots \cup ((I_m \setminus J_1) \setminus (J_2 \cup \ldots \cup J_n)). \end{aligned}$$

Da $I_1 \setminus J_1$ eine Vereinigung von maximal zwei halboffenen Intervallen ist, folgt die Behauptung durch Induktion über n. $\square$

Lemma 67.2. *Es sei $\mathcal{V}$ der Mengen-Präring aller Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$, die sich als eine endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen $[a, b[$ schreiben lassen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die zu $V \in \mathcal{V}$ über eine Zerlegung in disjunkte halboffene Intervalle*
$$V = [a_1, b_1[\uplus \ldots \uplus [a_n, b_n[$$
definierte Zahl
$$\mu(V) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$
ist wohldefiniert.

(2) *Durch die Zuordnung $V \mapsto \mu(V)$ wird ein Prämaß auf diesem Präring definiert.*

Beweis. Siehe Aufgabe 67.10. □

Satz 67.3. *Es sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die σ-Algebra der Borel-Mengen auf $\mathbb{R}$. Dann gibt es genau ein σ-endliches Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, das für jedes halboffene Intervall $[a, b[$ den Wert $\lambda([a, b[) = b - a$ besitzt. Statt halboffene Intervalle kann man auch offene oder abgeschlossene Intervalle nehmen.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 67.2, aus Satz 64.7 und aus Satz 65.7. □

Definition 67.4. Das eindeutig bestimmte Maß $\lambda^1 = \lambda$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, das für jedes halboffene Intervall $[a, b[$ den Wert $\lambda([a, b[) = b - a$ besitzt, heißt (eindimensionales) *Borel-Lebesgue-Maß*.

Das Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

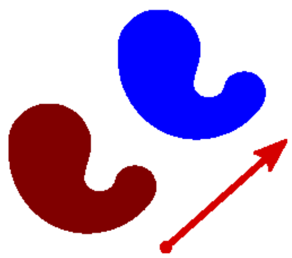
Satz 67.5. *Der $\mathbb{R}^n$ sei versehen mit der σ-Algebra der Borel-Mengen $\mathcal{B}^n$. Dann gibt es auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ genau ein σ-endliches Maß*
$$\lambda^n : \mathcal{B}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0},\, T \longmapsto \lambda^n(T),$$
das für alle Quader $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ den Wert
$$\lambda^n(Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$
besitzt.

Beweis. Für $n = 1$ ist dies der Inhalt von Satz 67.3. Für $n \geq 2$ folgt dies aus Satz 66.4, angewendet auf das n-fache Produkt von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda^1)$ mit sich selbst. □

Definition 67.6. Das eindeutig bestimmte Maß $\lambda = \lambda^n$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, das für jeden Quader der Form $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ den Wert $\lambda(Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ besitzt, heißt *Borel-Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung 67.7. Das Borel-Lebesgue-Maß ordnet also jeder Borel-Menge eine reelle Zahl oder das Symbol ∞ zu. Die Quader bilden dabei die Grundkörper, denen auf eine besonders einfache Weise ein Maß zugeordnet wird, wodurch das gesamte Maß festgelegt wird. Für eine beliebige messbare Menge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ist dabei $\lambda(T)$ gegeben als das Infimum von $\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i)$ über alle abzählbaren Überpflasterungen von T mit Quadern (so war eben das äußere Maß definiert, mit dessen Hilfe wir den Fortsetzungssatz für Maße aufstellen konnten). Es gibt kein allgemeines Verfahren, für gegebene Mengen (bspw. Flächenstücke, Körper) ihr Maß (ihren Flächeninhalt, ihr Volumen) effektiv zu bestimmen. Eine wichtige Technik ist die Integration von Funktionen.

Die Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes



Für eine beliebige Teilmenge $T \subseteq V$ in einem Vektorraum V und einen Vektor $v \in V$ nennt man

$$T + v = \{x + v | \, x \in T\}$$

die um v *verschobene Menge*.

Definition 67.8. Ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ heißt *translationsinvariant*, wenn für alle messbaren Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$\mu(T) = \mu(T + v)$$

gilt.

Satz 67.9. *Das Borel-Lebesgue-Maß λ^n ist das einzige translationsinvariante Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, das auf dem Einheitswürfel den Wert 1 besitzt.*

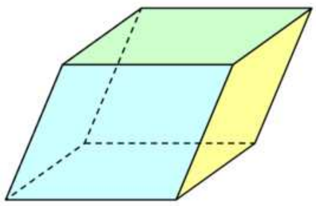
Beweis. Sei μ ein solches Maß. Da der $\mathbb{R}^n$ durch abzählbar viele Verschiebungen des Einheitswürfels überdeckt wird, die wegen der Translationsinvarianz von μ alle das gleiche Maß besitzen, ist μ σ-endlich. Wir müssen zeigen, dass μ mit λ^n übereinstimmt, wobei es aufgrund des Eindeutigkeitssatzes genügt, die Gleichheit auf einem durchnittsstabilen Erzeugendensystem nachzuweisen. Ein solches System bilden die Quader der Form $[a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[$ mit rationalen Ecken. Wegen der Translationsinvarianz von μ besitzt ein solcher Quader das gleiche Maß wie der verschobene Quader $[0, b_1 - a_1[\times \cdots \times [0, b_n - a_n[$. Wir schreiben einen solchen Quader unter Verwendung eines Hauptnenners als $Q = [0, \frac{c_1}{m}[\times \cdots \times [0, \frac{c_n}{m}[$ mit

$m, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$. Dieser Quader setzt sich aus $c_1 \cdots c_n$ Quadern (nämlich $[\frac{i_1}{m}, \frac{i_1+1}{m}[\times \cdots \times [\frac{i_n}{m}, \frac{i_n+1}{m}[$ mit $i_j \in \{0, \ldots, c_j - 1\}$) zusammen, die alle das gleiche μ-Maß haben, da sie ineinander verschoben werden können. Das μ-Maß des Quaders Q ist also das $c_1 \cdots c_n$-fache des μ-Maßes des Quaders $\tilde{Q} = [0, \frac{1}{m}[\times \cdots \times [0, \frac{1}{m}[$. Da sich der Einheitswürfel aus m^n verschobenen Kopien dieses kleineren Würfels zusammensetzt, muss $\mu(\tilde{Q}) = \frac{1}{m^n}$ und damit

$$\mu(Q) \,=\, c_1 \cdots c_n \cdot \frac{1}{m^n} \,=\, \lambda^n(Q)$$

sein. □

Die Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes kann man auch so formulieren, dass jede Translation eine maßtreue Abbildung ist.



Definition 67.10. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und seien linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ gegeben. Dann nennt man

$$P = \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n |\, a_i \in [0,1]\}$$

das von den v_i *erzeugte Parallelotop.*

Lemma 67.11. *Es sei λ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathbb{R}^n$ und es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein echter Unterraum. Dann ist $\lambda(U) = 0$.*

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $d < n$ und nehmen wir an, dass $\lambda^n(U) > 0$ ist. Es sei $u_1, \ldots, u_d$ eine Basis von U und

$$P = \{a_1 u_1 + \ldots + a_d u_d |\, a_i \in [0,1]\}$$

das davon erzeugte d-dimensionale Parallelotop.[1] Die verschobenen Parallelotope

$$P_k = P + k_1 u_1 + \ldots + k_d u_d,\; k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$$

besitzen wegen der Translationsinvarianz alle dasselbe Maß und bilden eine Überdeckung von U. Da es abzählbar viele sind, muss $\lambda^n(P) > 0$ gelten. Es sei nun $u_{d+1}, \ldots, u_n$ eine Ergänzung der Basis zu einer Basis von V, und sei

$$R = \{a_1 u_1 + \ldots + a_d u_d + \ldots + a_n u_n |\, a_i \in [0,1]\}$$

[1] Wenn man eine Orthonormalbasis wählt handelt es sich um einen Würfel.

das zugehörige n-dimensionale Parallelotop. Für dieses ist $\lambda^n(R) < \infty$. Wir betrachten nun die abzählbar unendlich vielen Parallelotope

$$P_q = P + q u_n \text{ mit } q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\,.$$

Diese liegen alle innerhalb von R und besitzen wegen der Translationsinvarianz alle das gleiche Maß wie P. Ferner sind sie paarweise disjunkt, da andernfalls ein nichttriviales Vielfaches von u_n zu $P \subset U$ gehören würde. Aus

$$\sum_{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \lambda^n(P_q) \,=\, \lambda^n\Big(\bigcup_{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} P_q\Big) \,\leq\, \lambda^n(R)$$

folgt $\lambda^n(R) = \infty$, ein Widerspruch. $\square$

Allgemein nennt man Unterräume (und zwar nicht nur Untervektorräume, sondern auch affine Unterräume, also verschobene Untervektorräume) des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$ *Hyperebenen*. Insbesondere besitzen Hyperebenen das Maß 0.

Lemma 67.12. *Es sei ν ein translationsinvariantes Maß auf* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. *Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\nu = c\lambda^n$.*

Beweis. Es sei $c = \nu(E)$, wobei E der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$ sei. Wenn $c = 0$ ist, so liegt das Nullmaß vor, da sich der $\mathbb{R}^n$ mit abzählbar vielen verschobenen Einheitswürfeln überdecken lässt, die wegen der Translationsinvarianz ebenfalls das Maß 0 haben. Dann hat der Gesamtraum das Maß 0 und damit hat jede messbare Teilmenge das Maß 0. Sei also $c \neq 0$. In diesem Fall betrachten wir das durch

$$\mu(T) := \frac{1}{c}\nu(T)$$

definierte (umskalierte) Maß. Dieses ist nach wie vor translationsinvariant und besitzt auf dem Einheitswürfel den Wert 1. Nach Satz 67.9 ist also $\mu = \lambda^n$ und somit ist $\nu(T) = c\lambda^n$. $\square$

Abbildungsverzeichnis