Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 9

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 9.1. Begründe, warum der Ring

$$\mathbb{Z}[X, Y, Z, W]/(XY - ZW, 5X^8 - YZ^3 + 2WXY)$$

noethersch ist.

Aufgabe 9.2. Sei R ein kommutativer Ring und sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen. Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n$ ebenfalls ein Ideal ist. Zeige ebenso durch ein einfaches Beispiel, dass die Vereinigung von Idealen im Allgemeinen kein Ideal sein muss.

Aufgabe 9.3. Sei K ein Körper und sei

$$K[X_n, \, n \in \mathbb{N}]$$

der Polynomring über K in unendlich vielen Variablen. Man beschreibe darin ein nicht endlich erzeugtes Ideal und eine unendliche, echt aufsteigende Idealkette.

Aufgabe 9.4. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \supseteq D(s) \longrightarrow \mathbb{A}_K^3, \, (s, t) \longmapsto (s, t^2/s, t) = (x, y, z) \, .$$

Bestimme eine algebraische Gleichung F für das Bild. Untersuche die Abbildung auf Injektivität und Surjektivität (als Abbildung nach $V(F)$). Vergleiche diese Abbildung mit den in Aufgabe 6.12 diskutierten Abbildungen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.5. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei I ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/I$. Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die I umfassen.

Zeige, dass das Gleiche gilt für Primideale, Radikalideale und maximale Ideale.

Aufgabe 9.6. (4 Punkte)

Zeige, dass $\mathbb{Q}$ keine Algebra von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 9.7. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $A = K[X,Y]$. Finde eine K-Unteralgebra von A, die nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 9.8. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel eines nicht-noetherschen Ringes, dessen Reduktion ein Körper ist.

Aufgabe 9.9. (4 Punkte)

Es seien $F, G \in K[X_1, \ldots, X_n]$ Polynome und $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Diskutiere, wie sich die verschiedenen Äquivalenzbegriffeaus der siebten Vorlesung für F und G (und für $V(F)$ und $V(G)$) unter dem Körperwechsel verhalten.