Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 12

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 12.1. Zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ kein Element x mit $x^2 = 2$ gibt.

Aufgabe 12.2. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 12.3. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige, dass die Folge genau dann gegen x konvergiert, wenn es für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n - x| \leq \frac{1}{k}$ gilt.

Aufgabe 12.4. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{n^2}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 12.5. Beweise die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 12.10.

Aufgabe 12.6. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

In den beiden folgenden Aufgaben geht es um die Folge der Fibonacci-Zahlen.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 12.7. Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt ($n \geq 2$)

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n\,.$$

Aufgabe 12.8. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt ($n \geq 1$).

Aufgabe 12.9. Man untersuche die folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$ auf die Begriffe obere Schranke, untere Schranke, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

(1) $\{2, -3, -4, 5, 6, -1, 1\}$,
(2) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{13}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$,
(3) $]-5, 2]$,
(4) $\left\{\frac{1}{n} \middle| \, n \in \mathbb{N}_+\right\}$,
(5) $\left\{\frac{1}{n} \middle| \, n \in \mathbb{N}_+\right\} \cup \{0\}$,
(6) $\mathbb{Q}_-$,
(7) $\{x \in \mathbb{Q} | \, x^2 \leq 2\}$,
(8) $\{x \in \mathbb{Q} | \, x^2 \leq 4\}$,
(9) $\{x^2 | \, x \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.10. (3 Punkte)

Untersuche die durch
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$
gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 12.11. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch
$$x_n = \frac{7n^3 - 3n^2 + 2n - 11}{13n^3 - 5n + 4}$$
definierten reellen Folge.

Aufgabe 12.12. (3 Punkte)

Zeige, dass die reelle Folge
$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$
gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 12.13. (6 Punkte)

Untersuche die durch
$$x_n = \frac{\sqrt{n}^n}{n!}$$
gegebene Folge auf Konvergenz.

Aufgabe 12.14. (5 Punkte)

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen und sei die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $z_{2n-1} := x_n$ und $z_{2n} := y_n$. Zeige, dass $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.