Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

11. Beispielklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	3	2	3	3	5	2	4	4	2	4	4	3	4	2	4	5	2	64
erhaltene Pkt.:																				

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *angeordneter* Körper.
(2) Eine *Folge* in einer Menge M.
(3) Eine *Intervallschachtelung* in einem angeordneten Körper K.
(4) Die *komplexe Konjugation*.
(5) Ein *Berührpunkt* einer Menge $T \subseteq \mathbb{K}$.
(6) Eine n-te *komplexe Einheitswurzel* ($n \in \mathbb{N}_+$).
(7) Eine *Treppenfunktion*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem beschränkten reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
(8) Die *Integralfunktion* zum Startpunkt $a \in I$ zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz von Bolzano-Weierstraß*.
(2) Das *Majorantenkriterium* für eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ von komplexen Zahlen.
(3) Der Satz über die *Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge*

$$f_n\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

auf einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}$.
(4) Der *Satz über die lineare Approximierbarkeit* einer Funktion

$$f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Die offizielle Berechtigung für eine Klausur werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Der Professor sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Hans will sich ein Frühstücksei kochen. Im Moment, als er das Ei in das kochende Wasser eintaucht, zeigt seine Uhr 7 : 21 (die Uhr läuft genau und hat keine Sekundenangabe). Als er das nächste Mal auf die Uhr schaut, zeigt sie 7 : 26 an. Bestimme das Infimum, Minimum, Supremum, Maximum der Zeit, die das Ei zwischen den beiden Momenten im Wasser ist.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| < 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

Aufgabe 7. (5 Punkte)

Beweise die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Zeige, dass der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ nicht gelten muss.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Beweise den Satz über die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge

$$f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{q^2},\ q \in \mathbb{Q} \cap [2,3]\,,$$

summierbar ist oder nicht.

Aufgabe 11. (2 Punkte)
Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin(2x)}.$$

Aufgabe 12. (4 Punkte)
Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, die Gleichheit

$$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

gilt.

Aufgabe 13. (4 (1+3) Punkte)
Es seien

$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x)).$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2.$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Aufgabe 14. (3 (1+2) Punkte)
Bestimme die Ableitung (auf den jeweiligen Definitionsbereichen) der folgenden Funktionen:

a) $\tan x$,

b) $\arctan x$.

Aufgabe 15. (4 Punkte)
Bestimme für die Funktionen $\sin^n x$, $n \in \mathbb{N}_+$, das Konvexitätsverhalten und die Wendepunkte auf $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Aufgabe 16. (2 Punkte)

a) Unterteile das Intervall $[-4, 5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4, 5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

AUFGABE 17. (4 (1+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3.$$

a) Bestimme zu einer Geraden $y = sx$, $s > 0$, die Schnittpunkte mit dem Graphen von f.

b) Zu einer gegebenen Geraden aus Teil (a) legen der Schnittpunkt (c, d) mit $c > 0$, sein Basipunkt $(c, 0)$ und der Nullpunkt $(0, 0)$ ein Dreieck fest. Zeige, dass der Graph von f dieses Dreieck in zwei gleich große Flächen zerlegt.

AUFGABE 18. (5 Punkte)

Sei

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

AUFGABE 19. (2 Punkte)

Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Finde eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung, für die f eine Lösung ist.