Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 24

Übungsaufgaben

Aufgabe 24.1. Berechne das bestimmte Integral $\int_0^8 f(t)\,dt$, wobei die Funktion f durch

$$f(t) = \begin{cases} t+1, \text{ falls } 0 \leq t \leq 2\,, \\ t^2 - 6t + 11, \text{ falls } 2 < t \leq 5\,, \\ 6, \text{ falls } 5 < t \leq 6\,, \\ -2t + 18\,, \text{ falls } 6 < t \leq 8\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 24.2.*

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1,4]$.

Aufgabe 24.3. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_2^5 \frac{x^2+3x-6}{x-1}\,dx\,.$$

Aufgabe 24.4.*

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die beiden Graphen zu $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 24.5.*

Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6,22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f\colon [6,22] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t) = -t^3 + 27t^2 - 120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

Aufgabe 24.6.*
Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ die Abschätzung
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \ln 2$$
gilt. Tipp: Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[0, 1]$.

Aufgabe 24.7. Bestimme die zweite Ableitung der Funktion
$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t^5 - t^3 + 2t}\, dt\,.$$

Aufgabe 24.8. Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass die Funktion
$$h(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\, dt$$
differenzierbar ist und bestimme ihre Ableitung.

Aufgabe 24.9. Es sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die durch
$$a_n := \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)\, dt$$
definierte Folge. Entscheide, ob diese Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 24.10. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit $a_n \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass dann die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{a_n} f(x) dx$$
absolut konvergent ist.

Aufgabe 24.11. Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[a, b]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Man zeige: Ist f stetig in einem Punkt $c \in [a, b]$ mit $f(c) > 0$, dann gilt
$$\int_a^b f(x) dx > 0\,.$$

AUFGABE 24.12. Man zeige, dass die Gleichung

$$\int_0^x e^{t^2} dt = 1$$

eine einzige Lösung $x \in [0,1]$ besitzt.

AUFGABE 24.13. Seien

$$f, g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx \, .$$

Beweise, dass es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

AUFGABE 24.14. Es seien

$$f, g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen und es sei $g(t) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Zeige, dass es dann ein $s \in [a,b]$ gibt mit

$$\int_a^b f(t)g(t) \, dt = f(s) \int_a^b g(t) \, dt \, .$$

AUFGABE 24.15. Bestimme den Flächeninhalt unterhalb des Graphen der Sinusfunktion zwischen 0 und π.

AUFGABE 24.16.*

Sei

$$f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 24.17. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^7 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 5}{x+1} \, dx \, .$$

Aufgabe 24.18. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,.$$

Aufgabe 24.19. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x)=x^2 \text{ und } g(x)=-2x^2+3x+4$$

eingeschlossen wird.

Aufgabe 24.20. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\, t\longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t)=\begin{cases}0 \text{ für } t=0,\\ \sin\frac{1}{t} \text{ für } t\neq 0\,.\end{cases}$$

Zeige, unter Bezug auf die Funktion $g(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$, dass f eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 24.21. (5 Punkte)

Betrachte die durch

$$a_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}$$

gegebene Folge. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

(Verwende Eigenschaften der Wurzelfunktion.)

Aufgabe 24.22. (6 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion

$$f\colon [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$$

derart, dass es ein $n\in\mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft, dass das Treppenintegral zur maximalen unteren Treppenfunktion zur äquidistanten Unterteilung in n Teilintervalle größer ist als dasjenige zu $n+1$ Teilintervallen (d.h. mehr Teilungspunkte führen zu einer schlechteren Approximation).

(Ignoriere zuerst die beiden Bedingungen stetig und streng.)