**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2013/2014**

# Analysis I

## Arbeitsblatt 13

### Übungsaufgaben

Aufgabe 13.1. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Zeige, dass $f$ konstant ist.

Aufgabe 13.2. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die genau zwei Werte annimmt.

Aufgabe 13.3. Finde für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/100$.

Aufgabe 13.4.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 - 3x + 1.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[0, 1]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von $f$ liegen muss.

Aufgabe 13.5. Zeige, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht stetig ist, aber dem Zwischenwertsatz genügt.

Aufgabe 13.6. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt{\frac{7n^2 - 4}{3n^2 - 5n + 2}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 13.7. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$$

definiert. Zeige, dass diese Folge konvergiert und berechne den Grenzwert.

Aufgabe 13.8. Bestimme direkt, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

ein Extremum im Nullpunkt besitzen.

Aufgabe 13.9. Man gebe ein Beispiel eines beschränkten Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von $f$ beschränkt ist, die Funktion aber kein Maximum annimmt.

Aufgabe 13.10. Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf einem reellen Intervall. Die Funktion habe in den Punkten $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, lokale Maxima. Zeige, dass die Funktion zwischen $x_1$ und $x_2$ mindestens ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 13.11. Es sei

$$f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1[$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass $f$ nicht surjektiv ist.

Aufgabe 13.12. Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

stetige Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $(fg)(a) = 0$ und mit $f(a) \neq 0$. Zeige, dass es ein $\delta > 0$ gibt derart, dass die Einschränkung $g|_{[a-\delta, a+\delta]}$ die Nullfunktion ist.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.13. (2 Punkte)

Bestimme das Minimum der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2 + 3x - 5.$$

(Achtung: Ableitungen haben wir noch nicht eingeführt!)

Aufgabe 13.14. (4 Punkte)

Finde für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/200$.

Aufgabe 13.15. (4 Punkte)

Zeige, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 13.16. (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt[3]{\frac{27n^3 + 13n^2 + n}{8n^3 - 7n + 10}},\; n \in \mathbb{N}\,.$$

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff des Fixpunktes.

Es sei $M$ eine Menge und

$$f\colon M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

Aufgabe 13.17. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow [a,b]$$

eine stetige Funktion des Intervalls $[a,b]$ in sich. Zeige, dass $f$ einen Fixpunkt besitzt.