**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2013/2014**

# Analysis I

## Arbeitsblatt 28

### Übungsaufgaben

Aufgabe 28.1.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 2 \text{ mit } y(5) = 3\,.$$

Aufgabe 28.2.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^2 - 3t + 4 \text{ mit } y(-1) = -5\,.$$

Aufgabe 28.3. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \sin t \text{ mit } y(\pi) = 7\,.$$

Aufgabe 28.4. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^3 - 2t + 5 \text{ mit } y(3) = 4\,.$$

Aufgabe 28.5. Man mache sich anschaulich und mathematisch klar, dass bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung der Abstand zwischen zwei Lösungen $y_1$ und $y_2$ zeitunabhängig ist, d.h. dass $y_1(t) - y_2(t)$ konstant ist.

Man gebe ein Beispiel, dass dies bei zeitunabhängigen Differentialgleichungen nicht der Fall sein muss.

Aufgabe 28.6. Untersuche die gewöhnlichen Differentialgleichungen, die sowohl zeit- als auch ortsunabhängig sind.

Aufgabe 28.7. Finde alle Lösungen zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = y\,.$$

Die folgende Aufgabe setzt Aufgabe 19.11 voraus.

Aufgabe 28.8. Es sei

$$D(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \, f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Dimension der Eigenräume der Ableitung

$$D(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \text{Abb}\,(\mathbb{R},\mathbb{R})\,,\; f \longmapsto f'.$$

Aufgabe 28.9. Finde die Lösungen für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' \;=\; cy^{\frac{2}{3}}$$

mit $c \in \mathbb{R}_+$.

Finde eine inhaltliche Interpretation zu dieser Differentialgleichung analog zu Beispiel 28.10.

Aufgabe 28.10. Zeige, dass $y(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' \;=\; ny^{\frac{n-1}{n}}$$

auf $\mathbb{R}_+$ ist.

Aufgabe 28.11. Finde eine differenzierbare Funktion $y(t)$, die die Bedingung

$$y'(t) \;=\; y(t-1)$$

erfüllt (dabei ist $y(t-1)$ als der Wert der Funktion $y$ an der Stelle $t-1$ zu verstehen, nicht als das Produkt der Funktionsvariablen $y$ mit $t-1$; es handelt sich also *nicht* um eine Differentialgleichung).

Aufgabe 28.12. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y\,.$$

Löse damit das Anfangswertproblem

$$y'' = y \text{ mit } y(0) = 3 \text{ und } y'(0) = -2\,.$$

Aufgabe 28.13. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' \;=\; -y.$$

Löse damit das Anfangswertproblem

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 5 \text{ und } y'(0) = 6\,.$$

Aufgabe 28.14. Zeige, dass die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = 0$$

einen $n$-dimensionalen reellen Vektorraum bilden.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.15. (3 Punkte)

Finde eine Lösung zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = t + y\,.$$

Aufgabe 28.16. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t^3}{t^2+1} \text{ mit } y(1) = 2\,.$$

Aufgabe 28.17. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{1}{\sinh t}$$

auf $\mathbb{R}_+$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 7$.

Aufgabe 28.18. (4 Punkte)

Finde alle polynomialen Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = 9y - 3ty' + y''\,.$$

Aufgabe 28.19. (5 Punkte)

Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ unendlich oft differenzierbare Funktionen

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z),$$

derart gibt, dass die $n$-te Ableitung $f^{(n)}$ mit $f$ übereinstimmt, die Ableitungen $f^{(i)}$, $i < n$, aber nicht.

Aufgabe 28.20. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer stetigen, streng wachsenden Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

mit $f(0) = 1$ und mit $f(x+1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die von $2^x$ verschieden ist.