Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 23

Übungsaufgaben

Aufgabe 23.1. Bestimme das Treppenintegral über $[-3,+4]$ zur Treppenfunktion, die durch

$$f(t) = \begin{cases} 5, \text{ falls } -3 \leq t \leq -2\,, \\ -3, \text{ falls } -2 < t \leq -1\,, \\ \frac{3}{7}, \text{ falls } -1 < t < -\frac{1}{2}\,, \\ 13, \text{ falls } t = -\frac{1}{2}\,, \\ \pi, \text{ falls } -\frac{1}{2} < t < e\,, \\ 0, \text{ falls } e \leq t \leq 3\,, \\ 1, \text{ falls } 3 < t \leq 4\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 23.2.*

a) Unterteile das Intervall $[-4,5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4,5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Aufgabe 23.3. Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ an, die nur endlich viele Werte annimmt, aber keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 23.4. Es seien

$$f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch

(1) $f+g$,
(2) $f \cdot g$,
(3) $\max(f,g)$,
(4) $\min(f,g)$,

Treppenfunktionen sind.

AUFGABE 23.5. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

eine Treppenfunktion und

$$g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

AUFGABE 23.6. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

AUFGABE 23.7. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^2 t^3\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

AUFGABE 23.8. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-2}^7 -t^3 + 3t^2 - 2t + 5\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

AUFGABE 23.9.*

Zeige (ohne Stammfunktionen zu verwenden)

$$\int_0^1 e^x dx \;=\; e-1.$$

AUFGABE 23.10. (3 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto \frac{1}{x},$$

weder das Unterintegral noch das Oberintegral existiert.

AUFGABE 23.11. Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihre Grenzwerte übereinstimmen. Zeige, dass dann f Riemann-integrierbar ist und dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

gilt.

Aufgabe 23.12. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion. Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 23.13. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ gibt derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i = f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.

Aufgabe 23.14. Es sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.
(2) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.
(3) Es ist $\int_a^b f(t) + g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.
(4) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt$.

Aufgabe 23.15. Es sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.16. (4 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_a^b t^2\,dt$$

in Abhängigkeit von a und b explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.17. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

und einer Treppenfunktion

$$g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 23.18. (6 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}},$$

das Unterintegral existiert, aber nicht das Oberintegral.

Aufgabe 23.19. (8 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2}\, dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.20. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \sin \frac{1}{t} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist, dass es aber keine Treppenfunktion s mit der Eigenschaft gibt, dass $|s(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in [0,1]$ ist.

Aufgabe 23.21. (6 Punkte)

Es sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f,g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige, dass auch fg Riemann-integrierbar ist.