Prof. Dr. H. Brenner, Dr. L. Katthän **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 8

Übungsaufgaben

Aufgabe 8.1. Formalisiere mit dem Symbolalphabet $S = \{f, g\}$, wobei f, g einstellige Funktionssymbole sind, die Aussage, dass die Hintereinanderschaltung von injektiven Abbildungen wieder injektiv ist.

Aufgabe 8.2. Axiomatisiere den Körperbegriff in einer geeigneten Sprache erster Stufe.

Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Axiome der Addition
  (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
  (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
  (c) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
  (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.
(2) Axiome der Multiplikation
  (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
  (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
  (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
  (d) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.
(3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Aufgabe 8.3. Axiomatisiere den Begriff eines angeordneten Körpers in einer geeigneten Sprache erster Stufe.

Ein Körper K heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „$\geq$“ auf K gibt, die die beiden Eigenschaften

(1) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$)
(2) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$)

erfüllt.

Aufgabe 8.4. Sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ die Symbolmenge für einen angeordneten Körper. Zeige

$$\mathbb{R} \vDash \forall x \forall y \left(x \geq y \leftrightarrow \exists z \left(x - y = z^2 \right) \right)$$

und

$$\mathbb{Q} \vDash \neg \left(\forall x \forall y \left(x \geq y \leftrightarrow \exists z (x - y = z^2) \right) \right) .$$

Über den reellen Zahlen kann man also das Symbol $\geq$ mit anderen Symbolen ausdrücken.

Aufgabe 8.5. Sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ die Symbolmenge für einen angeordneten Körper und f ein einstelliges Funktionssymbol. Formuliere über $S' = S \cup \{f\}$ folgende Eigenschaften.

(1) Die Stetigkeit von f.
(2) Die gleichmäßige Stetigkeit von f.
(3) Die Differenzierbarkeit von f.

Gesucht ist also ein Ausdruck α aus $L^{S'}$ mit der Eigenschaft, dass α in einer Interpretation von S' (gegeben durch einen angeordneten Körper K und eine Funktion $f\colon K \to K$) genau dann gilt, wenn f stetig (u.s.w.) ist.

Aufgabe 8.6. Zeige, dass die Polynomfunktionen in einer Variablen über einem angeordneten Körper stetig sind. Formuliere diese Aussage über dem Symbolalphabet $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ für Polynome eines festes Grades.

Aufgabe 8.7. Sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ die Symbolmenge für einen angeordneten Körper und f ein einstelliges Funktionssymbol. Formuliere über $S' = S \cup \{f\}$ die Aussage des Zwischenwertsatzes.

Aufgabe 8.8. Sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ die Symbolmenge für einen angeordneten Körper. Formuliere über S die Aussage des Zwischenwertsatzes für Polynome vom Grad d.

In welchem Zusammenhang stehen die beiden vorstehenden Formulierungen?

Aufgabe 8.9. Zeige, dass die folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke allgemeingültig sind.

(1)
$$\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)\,.$$
(2)
$$(\forall x \alpha) \rightarrow \alpha$$
(wobei α ein Ausdruck ist).
(3)
$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \rightarrow \alpha\,,$$
wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Gruppenaxiome sind und
$$\alpha := \forall z(\forall x(zx = x \wedge xz = x) \rightarrow z = e)$$
ist.

Aufgabe 8.10. Es seien $p_1, \ldots, p_n$ Aussagevariablen und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ prädikatenlogische Ausdrücke. Zeige, dass man, wenn man in einer allgemeingültigen aussagenlogischen Aussage α, in dem keine weiteren Aussagevariablen vorkommen, jedes Vorkommen von p_i durch β_i ersetzt, einen allgemeingültigen prädikatenlogischen Ausdruck erhält.

Aufgabe 8.11. Es sei Γ eine Ausdrucksmenge und α ein Ausdruck in einer Sprache erster Stufe. Zeige, dass $\Gamma \vDash \alpha$ genau dann gilt, wenn $\Gamma \cup \{\neg \alpha\}$ nicht erfüllbar ist.

Aufgabe 8.12. Formuliere die Injektivität für eine Abbildung
$$f\colon D \longrightarrow Z$$
prädikatenlogisch mit Hilfe der Verwendung von Sorten.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.13. (1 Punkt)

Formalisiere mit dem Symbolalphabet $S = \{f, g\}$, wobei f, g einstellige Funktionssymbole seien, die Aussage, dass die Hintereinanderschaltung von surjektiven Abbildungen wieder surjektiv ist.

Aufgabe 8.14. (2 Punkte)

Sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ die Symbolmenge für einen angeordneten Körper und f, g zwei einstellige Funktionssymbole. Formuliere über $S' = S \cup \{f, g\}$ die Aussage, dass die Hintereinanderschaltung von zwei stetigen Funktionen wieder stetig ist.

Aufgabe 8.15. (3 Punkte)

Formuliere ein prädikatenlogisches Axiomensystem für einen metrischen Raum über einem angeordneten Körper mit Hilfe von Sortenprädikaten.