

Vorkurs Mathematik**Arbeitsblatt 2**

AUFGABE 2.1. Beweise die mengentheoretische Fassung der aristotelischen Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen. Man formuliere auch die einzelnen Mengenbeziehungen mittels Quantoren.

- (1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
- (2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
- (3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
- (4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
- (5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \cap C \neq \emptyset$ folgt $A \cap C \neq \emptyset$.

Welche dieser Aussagen kann man durch Betrachten von Komplementen auf andere zurückführen?

AUFGABE 2.2. Es seien A, B und C drei Mengen. Man beweise die folgenden Gleichheiten.

- (1) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
- (2) $A \cup \emptyset = A$,
- (3) $A \cap B = B \cap A$,
- (4) $A \cup B = B \cup A$,
- (5) $A \cap B = B \cap A$,
- (6) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- (7) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

AUFGABE 2.3. Es seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

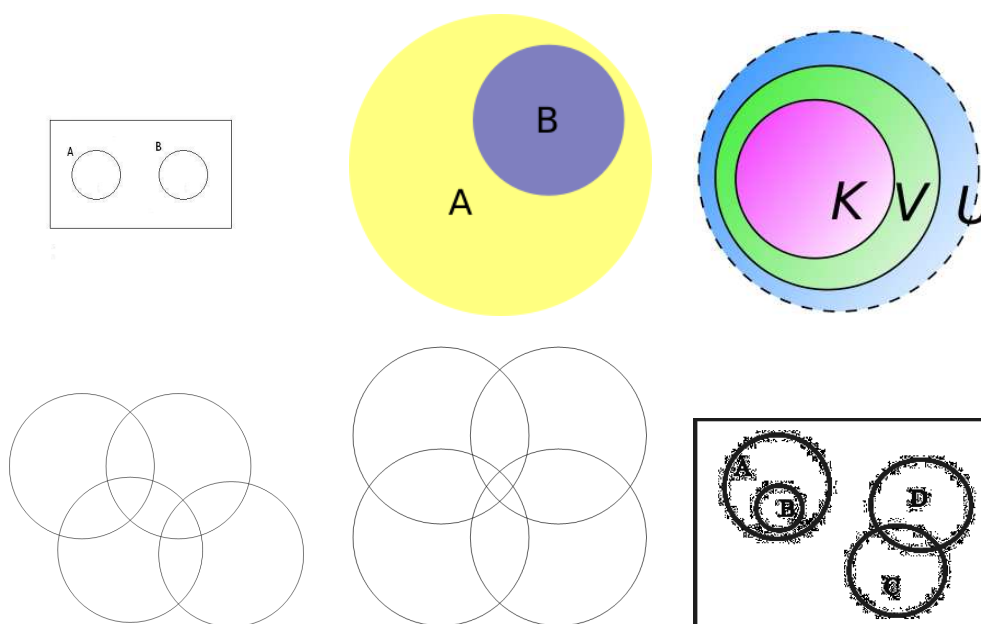
- (1) $A \subseteq B$,
- (2) $A \cap B = A$,
- (3) $A \cup B = B$,
- (4) $A \setminus B = \emptyset$.

AUFGABE 2.4. Skizziere die folgenden Teilmengen im \mathbb{R}^2 .

- (1) $\{(x, y) : x = 5\}$,
- (2) $\{(x, y) : x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$,
- (3) $\{(x, y) : y^2 \geq 2\}$,
- (4) $\{(x, y) : |x| = 3 \text{ und } |y| \leq 2\}$,

- (5) $\{(x, y) : 3x \geq y \text{ und } 5x \leq 2y\}$,
 (6) $\{(x, y) : xy = 0\}$,
 (7) $\{(x, y) : xy \geq 1 \text{ und } y \geq x^3\}$,
 (8) $\{(x, y) : xy = 0\}$.

AUFGABE 2.5. Betrachte die folgenden Mengendiagramme. Welche möglichen Schnittmengen der beteiligten Mengen werden in diesen geometrisch repräsentiert, welche nicht?



AUFGABE 2.6. Skizziere ein Mengendiagramm, das zu vier Mengen alle möglichen Schnittmengen darstellt.

AUFGABE 2.7. Finde für die folgenden drei Mengen

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}, \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}, \{9, 99, 999, 9999, 99999, \dots\}$$

(die alle die Form $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\}$ besitzen) jeweils ein Polynom

$$P(k) = c_0 + c_1k + c_2k^2 + c_3k^3 + c_4k^4$$

(mit Koeffizienten $c_j \in \mathbb{Q}$) mit

$$P(1) = a_1, P(2) = a_2, P(3) = a_3, P(4) = a_4, P(5) = a_5.$$

Man mache sich die Situation zunächst für die ersten ein, zwei, drei Elemente der Auflistung klar.

AUFGABE 2.8. Finde Parallelen zwischen Aussagen- und Quantorenlogik einerseits und Mengentheorie andererseits.

AUFGABE 2.9. Betrachte die „Definition“

Ein Hinz ist ein Kunz, dessen Schlonz ein Ranz ist,
und nehmen wir an, dass es sich um eine sinnvolle Definition handelt. Beantworte folgende Fragen.

- (1) Welcher Begriff wird neu eingeführt, welche sind schon bekannt?
- (2) Besitzt jeder Kunz einen Schlonz?
- (3) Besitzt jeder Hinz einen Schlonz?
- (4) Ist jeder Hinz ein Kunz?
- (5) Ist jeder Kunz ein Hinz?
- (6) Ist der Schlonz von jedem Kunz ein Ranz?
- (7) Ist der Schlonz von jedem Hinz ein Ranz?
- (8) Ist jeder Hinz ein Ranz?
- (9) Kann es einen Schlonz geben, der nicht zu einem Kunz gehört?
- (10) Wie kann man die Vermutung widerlegen, dass jeder Kunz ein Hinz ist?

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Disyunción de clases2.JPG, Autor = Benutzer Monimino auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	2
Quelle = Subset.svg, Autor = Benutzer Petr K auf Commons, Lizenz = PD	2
Quelle = Venn diagram of three sets.svg, Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	2
Quelle = CirclesN4xa.GIF, Autor = Benutzer Thisisbossi auf Commons, Lizenz = PD	2
Quelle = CirclesN4a.GIF, Autor = Benutzer Thisisbossi auf Commons, Lizenz = PD	2
Quelle = Standardsemantik klein.png, Autor = Benutzer Dhanyavaada auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	2