

Analysis I**Arbeitsblatt 19****Übungsaufgaben**

AUFGABE 19.1. Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, & \text{falls } \lfloor x \rfloor \text{ gerade,} \\ \lfloor x \rfloor - x + 1, & \text{falls } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade,} \end{cases}$$

definiert ist. Untersuche f in Hinblick auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Extrema.

AUFGABE 19.2. Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f: [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

AUFGABE 19.3. Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Finde die Punkte $a \in [-3, 3]$ derart, dass die Steigung der Funktion in a gleich der Gesamtsteigung zwischen -3 und 3 ist.

AUFGABE 19.4.*

Es seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt.}$$

AUFGABE 19.5. Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ maximal $d-1$ lokale Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Intervalle unterteilen lassen, auf denen f streng wachsend oder streng fallend ist.

AUFGABE 19.6. Führe die Details im Beweis zu Satz 19.7 aus.

AUFGABE 19.7.*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

AUFGABE 19.8.*

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

- Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen \mathbb{R}_+ und \mathbb{R} definiert.
- Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

AUFGABE 19.9.*

Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = (2x + 3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f . Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

AUFGABE 19.10.*

Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1.$$

- Zeige, dass die Funktion f im reellen Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt.
- Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.
- Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0, 1]$ derart an, dass $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$ ist.

AUFGABE 19.11. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei

$$D(I, \mathbb{R}) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Zeige, dass $D(I, \mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung

$$D(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Abb}(I, \mathbb{R}), f \longmapsto f',$$

eine lineare Abbildung ist. Bestimme den Kern dieser Abbildung und seine Dimension.

AUFGABE 19.12. Es sei

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$ und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt 0. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = z^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d - 2$.

AUFGABE 19.13.*

Es sei

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$ ein Punkt und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt w . Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = (z - w)^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d - 2$.

AUFGABE 19.14. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

mittels Polynomdivision (vergleiche Beispiel 19.9).

AUFGABE 19.15. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x^2 + x}$$

im Punkt $a = -1$.

AUFGABE 19.16.*

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1}$$

im Punkt $x = 1$, und zwar

- a) mittels Polynomdivision,
- b) mittels der Regel von l'Hospital.

AUFGABE 19.17. Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \frac{2x - 3}{5x^2 - 3x + 4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 19.18. (3 Punkte)

Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f: [-4, 4] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 3.$$

AUFGABE 19.19. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

AUFGABE 19.20. (5 Punkte)

Zeige, dass eine nichtkonstante rationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a, c \neq 0$), keine lokalen Extrema besitzt.

AUFGABE 19.21. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 5}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$$

im Punkt $a = 1$.