Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 19

Übungsaufgaben

Aufgabe 19.1. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ gerade}, \\ \lfloor x \rfloor - x + 1, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade}, \end{cases}$$

definiert ist. Untersuche f in Hinblick auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Extrema.

Aufgabe 19.2. Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon [-2,5] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

Aufgabe 19.3. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Finde die Punkte $a \in [-3,3]$ derart, dass die Steigung der Funktion in a gleich der Gesamtsteigung zwischen -3 und 3 ist.

Aufgabe 19.4.*

Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt}\,.$$

Aufgabe 19.5. Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ maximal $d-1$ lokale Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Intervalle unterteilen lassen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 19.6. Führe die Details im Beweis zu Satz 19.7 aus.

Aufgabe 19.7.*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

Aufgabe 19.8.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Aufgabe 19.9.*

Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe 19.10.*

Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1\,.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im rellen Intervall $[0,1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0,1]$ derart an, dass $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Aufgabe 19.11. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei

$$D(I,\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} |\, f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Zeige, dass $D(I,\mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung

$$D(I,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}\,(I,\mathbb{R})\,,\; f \longmapsto f',$$

eine lineare Abbildung ist. Bestimme den Kern dieser Abbildung und seine Dimension.

Aufgabe 19.12. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$ und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt 0. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = z^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d-2$.

Aufgabe 19.13.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$ ein Punkt und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt w. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = (z-w)^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d-2$.

Aufgabe 19.14. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

mittels Polynomdivision (vergleiche Beispiel 19.9).

Aufgabe 19.15. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x^2 + x}$$

im Punkt -1.

Aufgabe 19.16.*

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1}$$

im Punkt 1, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Aufgabe 19.17. Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{2x-3}{5x^2-3x+4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.18. (3 Punkte)

Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon\ [-4,4] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 3.$$

Aufgabe 19.19. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 19.20. (5 Punkte)

Zeige, dass eine nichtkonstante rationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

(mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a, c \neq 0$), keine lokalen Extrema besitzt.

Aufgabe 19.21. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^4+2x^3-3x^2+5x-5}{2x^3-x^2-4x+3}$$

im Punkt 1.