

Analysis I**Arbeitsblatt 10****Übungsaufgaben**

AUFGABE 10.1. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4 + i)X^2 - 3X + 9i) \cdot ((-3 + 7i)X^2 + (2 + 2i)X - 1 + 6i).$$

AUFGABE 10.2. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5i$ ersetzt.

AUFGABE 10.3. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi: K[X] \longrightarrow K, P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

- (1) $(P + Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
- (2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
- (3) $1(a) = 1$.

AUFGABE 10.4. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

- (1) $\text{grad}(P + Q) \leq \max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}$,
- (2) $\text{grad}(P \cdot Q) = \text{grad}(P) + \text{grad}(Q)$.

AUFGABE 10.5. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich 0 sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

AUFGABE 10.6. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung (also das Einsetzen eines Polynoms in ein weiteres) von zwei Polynomen wieder ein Polynom ist.

AUFGABE 10.7.*

Es seien die beiden komplexen Polynome

$$P = X^3 - 2iX^2 + 4X - 1 \text{ und } Q = iX - 3 + 2i$$

gegeben. Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

AUFGABE 10.8. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

AUFGABE 10.9. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

AUFGABE 10.10. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten μ_1, \dots, μ_k bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

AUFGABE 10.11. Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \dots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \dots, b_n \in K$ gegeben. Zeige, dass es ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n - 1$ gibt derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.

AUFGABE 10.12.*

Bestimme sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 1$$

und gebe die Primfaktorzerlegung von diesem Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$ an.

AUFGABE 10.13. Zeige durch Induktion, dass es zu natürlichen Zahlen a, n mit $a > 0$ eindeutig bestimmte natürliche Zahlen q, r mit $r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

AUFGABE 10.14. Zeige, dass es zu ganzen Zahlen a, n mit $a > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

AUFGABE 10.15. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K . Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X], Q \neq 0 \right\},$$

wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

AUFGABE 10.16. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

AUFGABE 10.17. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}.$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 10.18. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4 + i)X^3 - iX^2 + 2X + 3 + 2i) \cdot ((2 - i)X^3 + (3 - 5i)X^2 + (2 + i)X + 1 + 5i).$$

AUFGABE 10.19. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = (5 + i)X^4 + iX^2 + (3 - 2i)X - 1$ und $T = X^2 + iX + 3 - i$ durch.

AUFGABE 10.20. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X + 1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \dots + X^2 - X + 1)$$

für u ungerade.

AUFGABE 10.21. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $R = K[X]$ der Polynomring über K .

Sei

$$P = \{F \in K[X] \mid \text{Der Leitkoeffizient von } F \text{ ist positiv}\} .$$

Zeige, dass P die drei folgenden Eigenschaften besitzt

- (1) Entweder $F \in P$ oder $-F \in P$ oder $F = 0$.
- (2) Aus $F, G \in P$ folgt $F + G \in P$.
- (3) Aus $F, G \in P$ folgt $F \cdot G \in P$.

AUFGABE 10.22. (6 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper, $K[X]$ der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über K . Zeige unter Verwendung von Aufgabe 10.21, dass man Q zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.