Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 77

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 77.1. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen auf M. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Abbildung
$$f \times g : M \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, x \longmapsto (f(x), g(x)),$$
ist differenzierbar.
(2) $f + g$ ist differenzierbar.
(3) $f \cdot g$ ist differenzierbar.
(4) Wenn f keine Nullstelle besitzt, so ist auch f^{-1} differenzierbar.

Aufgabe 77.2. Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dies einen Ringhomomorphismus

$$\varphi^* : C^1(N, \mathbb{R}) \longrightarrow C^1(M, \mathbb{R}),\, f \longmapsto f \circ \varphi,$$

induziert.

Aufgabe 77.3. Zeige, dass ein halboffenes Intervall $[a, b[$ keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 77.4. Es sei $I = [0, 1[$ das (nach oben) halboffene Einheitsintervall und S^1 der Einheitskreis. Zeige, dass es ein bijektive stetige Abbildung

$$f : I \longrightarrow S^1$$

gibt, dass aber I und S^1 nicht homöomorph sind.

Aufgabe 77.5. Zeige, dass eine Ellipsoidoberfläche und die Einheitssphäre C^∞-diffeomorph sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 77.6. (4 Punkte)

Es seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ und $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen mit $0 \in V_1, V_2$ und es sei

$$\varphi : U_1 \times V_1 \longrightarrow U_2 \times V_1$$

ein Diffeomorphismus, der eine Bijektion zwischen $U_1 \times \{0\}$ und $U_2 \times \{0\}$ induziert. Zeige, dass dann auch die Einschränkung von φ auf $U_1 \cong U_1 \times \{0\}$ nach $U_2 \cong U_2 \times \{0\}$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 77.7. (5 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die mindestens zwei Elemente besitze. Zeige, dass es differenzierbare Funktionen

$$f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit $f, g \neq 0$, aber $fg = 0$.

Aufgabe 77.8. (8 Punkte)

Man gebe eine injektive stetige Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow S^2,$$

die (als Abbildung nach $\mathbb{R}^3$) rektifizierbar ist und unendliche Länge besitzt, und für die $\lim_{t \to \infty} f(t) = N$ und $\lim_{t \to -\infty} f(t) = S$ gilt.

Aufgabe 77.9. (6 Punkte)

Zeige, dass das Achsenkreuz keine topologische Mannigfaltigkeit ist.