Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 10

Verknüpfung von linearen Abbildungen und Matrizen

LEMMA 10.1. *Bei der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen entsprechen sich die Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen und die Matrizenmultiplikation. Damit ist folgendes gemeint: es seien* U, V, W *Vektorräume über einem Körper* K *mit Basen*

$$\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_p,\ \mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m\,.$$

Es seien

$$\psi : U \longrightarrow V \text{ und } \varphi : V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann gilt für die beschreibenden Matrizen von ψ, φ *und der Hintereinanderschaltung* $\varphi \circ \psi$ *die Beziehung*

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}}(\varphi \circ \psi) = (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi))\,.$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildungskette

$$U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W\,.$$

Bzgl. den Basen werde ψ durch die $n \times p$-Matrix $B = (b_{jk})_{jk}$ und φ durch die $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ beschrieben. Die Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ wirkt auf einen Basisvektor u_k folgendermaßen.

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(u_k) &= \varphi(\psi(u_k)) \\
&= \varphi(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \varphi(v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}) w_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_{ik} w_i.
\end{aligned}$$

Dabei sind diese Koeffizienten $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ gerade die Einträge in der Produktmatrix $A \circ B$. $\square$

Daraus folgt beispielsweise, dass das Produkt von Matrizen assoziativ ist.

Invertierbare Matrizen

Definition 10.2. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt M *invertierbar*, wenn es eine weitere Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ gibt mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A\,.$$

Definition 10.3. Es sei K ein Körper. Zu einer invertierbaren Matrix $M \in \text{Mat}_n(K)$ heißt die Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A$$

die *inverse Matrix* von M. Man schreibt dafür

$$M^{-1}\,.$$

Lineare Abbildungen und Basiswechsel

Lemma 10.4. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ Basen von W. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. der Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ durch die Matrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)$ beschrieben werde. Dann wird φ bzgl. den Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{z}$ durch die Matrix

$$M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}} \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}$$

beschrieben, wobei $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}}$ und $M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}}$ die Übergangsmatrizen sind, die die Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ und von $\mathfrak{w}$ nach $\mathfrak{z}$ beschreiben.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt.

Die linearen Standardabbildungen $K^n \to V$ bzw. $K^m \to W$ zu den Basen seien mit $\psi_{\mathfrak{v}}$, $\psi_{\mathfrak{u}}$, $\psi_{\mathfrak{w}}$, $\psi_{\mathfrak{z}}$ bezeichnet. Wenn man die beschreibende Matrix als lineare Abbildung zwischen den Standardräumen auffasst, so ergibt sich die Beziehung

$$M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) = \psi_{\mathfrak{w}}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_{\mathfrak{v}}\,.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{z}}(\varphi) &= \psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_{\mathfrak{u}} \\
&= \psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ (\psi_{\mathfrak{w}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ \psi_{\mathfrak{v}}^{-1}) \circ \psi_{\mathfrak{u}} \\
&= (\psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{w}}) \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ (\psi_{\mathfrak{v}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{u}}) \\
&= (\psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{w}}) \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ (\psi_{\mathfrak{u}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{v}})^{-1} \\
&= M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}.
\end{aligned}$$

$\square$

Korollar 10.5. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Basen von V. Dann besteht zwischen den Matrizen, die die lineare Abbildung bezüglich $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ (beidseitig) beschreiben, die Beziehung

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}(\varphi) = M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \circ M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}})^{-1}\,.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 10.4. □

Eigenschaften von linearen Abbildungen

Lemma 10.6. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *φ ist genau dann injektiv, wenn die Spalten der Matrix linear unabhängig sind.*
(2) *φ ist genau dann surjektiv, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.*
(3) *Bei $m = n$ ist φ genau dann bijektiv, wenn die Spalten der Matrix eine Basis von K^m bilden, und dies ist genau dann der Fall, wenn M invertierbar ist.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ Basen von V bzw. W und es seien $s_1, \ldots, s_n$ die Spalten von M. (1). Die Abbildung φ hat die Eigenschaft

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i\,,$$

wobei s_{ij} der i-te Eintrag des j-ten Spaltenvektors ist. Daher ist

$$\varphi(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j) \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j (\sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i) \;=\; \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij}) w_i.$$

Dies ist genau dann null, wenn $\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij} = 0$ ist für alle i, und dies ist äquivalent zu $\sum_{j=1}^{n} a_j s_j = 0$. Dafür gibt es ein nichttrivales (Lösungs)Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn die Spalten linear abhängig sind und genau dann, wenn φ nicht injektiv ist. (2). Siehe Aufgabe 10.12. (3). Sei $n = m$. Die erste Äquivalenz folgt aus (1) und (2). Wenn φ bijektiv ist, so gibt es die (lineare) Umkehrabbildung φ^{-1} mit

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_W \;\text{ und }\; \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_V\;.$$

Es sei M die Matrix zu φ und N die Matrix zu φ^{-1}. Die Matrix zur Identität ist die Einheitsmatrix. Nach Lemma 10.1 ist daher

$$M \circ N = E_n = N \circ M .$$

Die Umkehrung wird ähnlich bewiesen. □

Elementarmatrizen

Definition 10.7. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die folgenden Manipulationen an M *elementare Zeilenumformungen*.

(1) Vertauschung von zwei Zeilen.
(2) Multiplikation einer Zeile mit $s \neq 0$.
(3) Addition des a-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Elementare Zeilenumformungen ändern nicht den Lösungsraum von homogenen linearen Gleichungssystemen, wie in Lemma 5.7 gezeigt wurde.

Satz 10.8. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann gibt es elementare Zeilenumformungen und eine (Neu-)Nummerierung der Spalten*

$$j_1, j_2, \ldots, j_n$$

und ein $r \leq n$ derart, dass in der entstandenen Matrix die Spalten die Gestalt

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{k,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } b_{k,j_k} \neq 0 \text{ für } k \leq r$$

und

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{r,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } k > r$$

besitzen. Durch elementare Zeilenumformungen und zusätzliche Spaltenvertauschungen kann man also eine Matrix auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} d_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_{22} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{rr} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $d_{ii} \neq 0$ bringen.

Beweis. Dies beruht auf den entsprechenden Manipulationen wie beim Eliminationsverfahren, siehe Vorlesung 5. □

Definition 10.9. Es sei K ein Körper. Mit B_{ij} bezeichnen wir diejenige $n \times n$-Matrix, die an der Stelle (i, j) den Wert 1 und sonst überall den Wert null hat. Dann nennt man die folgenden Matrizen *Elementarmatrizen*.

(1) $V_{ij} := E_n - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$.
(2) $S_k := E_n + (s-1)B_{kk}$ für $s \neq 0$.
(3) $A_{ij}(a) := E_n + aB_{ij}$ für $i \neq j$ und $a \in K$.

Ausgeschrieben sehen diese Elementarmatrizen folgendermaßen aus.

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_k(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

LEMMA 10.10. *Es sei K ein Körper und M eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Dann hat die Multiplikation mit den Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung.*

(1) *$V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.*
(2) *$(S_k(s))) \circ M =$ Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.*
(3) *$(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile ($i \neq j$).*

Beweis. Siehe Aufgabe 10.12. □

Auffinden der inversen Matrix

VERFAHREN 10.11. Es sei M eine quadratische Matrix. Wie kann man entscheiden, ob die Matrix invertierbar ist, und wie kann man die inverse Matrix M^{-1} finden?

Dazu legt man eine Tabelle an, wo in der linken Hälfte zunächst die Matrix M steht und in der rechten Hälfte die Einheitsmatrix. Jetzt wendet man auf beide Matrizen schrittweise die gleichen elementaren Zeilenumformungen an. Dabei soll in der linken Hälfte die Ausgangsmatrix in die Einheitsmatrix umgewandelt werden. Dies ist genau dann möglich, wenn diese Matrix invertierbar ist. Wir behaupten, dass bei dieser Vorgehensweise in der rechten Hälfte die Matrix M^{-1} als Endmatrix entsteht. Dies beruht auf folgendem *Invarianzprinzip*. Jede elementare Zeilenumformung kann als eine Matrizenmultiplikation mit einer Elementarmatrix E von links realisiert werden. Wenn in der Tabelle

$$(M_1, M_2)$$

steht, so steht im nächsten Schritt

$$(EM_1, EM_2)\,.$$

Wenn man das Inverse (das man noch nicht kennt, das es aber gibt unter der Voraussetzung, dass die Matrix invertierbar ist) der linken Hälfte mit der rechten Hälfte multipliziert, so ergibt sich

$$(EM_1)^{-1}EM_2 \,=\, M_1^{-1}E^{-1}EM_2 \,=\, M_1^{-1}M_2.$$

D.h., dass sich dieser Ausdruck bei den Einzelschritten nicht ändert. Zu Beginn ist dieser Ausdruck gleich $M^{-1}E_n$, daher muss zum Schluss für (E_n, N) gelten

$$N = E_n^{-1}N = M^{-1}E_n = M^{-1}.$$

Beispiel 10.12. Wir wollen zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gemäß dem in Verfahren 10.11 beschriebenen Verfahren die inverse Matrix M^{-1} bestimmen.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$