Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Vorlesung 6

Rechenregeln für Folgen

Lemma 6.1. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Folge $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$
(2) *Die Folge $(x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$
(3) *Für $c\in K$ gilt*
$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c(\lim_{n\to\infty} x_n)\,.$$
(4) *Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}\,.$$
(5) *Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x}\,.$$

Beweis. (2). Sei $\epsilon>0$ vorgegeben. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist insbesondere beschränkt und daher existiert ein $D>0$ mit $|x_n|\leq D$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Sei $x:=\lim_{n\to\infty} x_n$ und $y:=\lim_{n\to\infty} y_n$. Wir setzen $C=\max\{D,|y|\}$. Daher gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit
$$|x_n-x|\leq\frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n\geq N_1 \text{ und } |y_n-y|\leq\frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n\geq N_2\,.$$
Diese Abschätzungen gelten dann auch für $n\geq N:=\max\{N_1,N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher
$$\begin{aligned}
|x_ny_n-xy| &= |x_ny_n-x_ny+x_ny-xy|\\
&\leq |x_ny_n-x_ny|+|x_ny-xy|\\
&= |x_n|\,|y_n-y|+|y|\,|x_n-x|\\
&\leq C\frac{\epsilon}{2C}+C\frac{\epsilon}{2C}
\end{aligned}$$

$$= \epsilon.$$

(4). Da der Limes der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht null ist, gilt für $n \geq N_1$ die Bedingung $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$ und damit $\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon\, |x|^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_2\,.$$

Dann gilt für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x_n - x}{x x_n} \right| = \frac{1}{|x|\,|x_n|}\,|x_n - x| \leq \frac{2}{|x|^2} \cdot \frac{\epsilon\,|x|^2}{2} = \epsilon.$$

□

Lemma 6.2. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 6.5. □

Lemma 6.3. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen in K. Es gelte*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.

Beweis. Siehe Aufgabe 6.6. □

Definition 6.4. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Dann heißt die Folge *wachsend*, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, und *streng wachsend*, wenn $x_{n+1} > x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

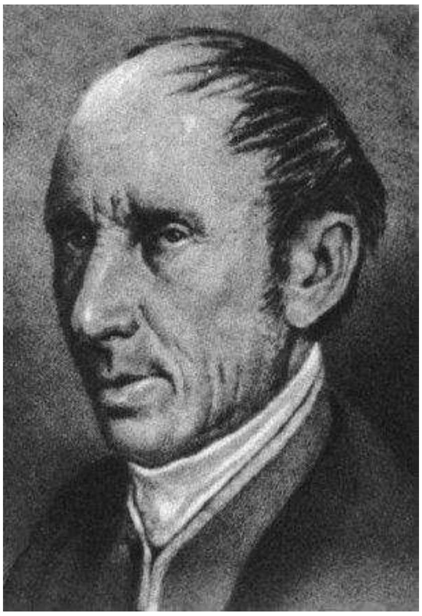
Die Folge heißt *fallend*, wenn $x_{n+1} \leq x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, und *streng fallend*, wenn $x_{n+1} < x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Als gemeinsamen Begriff für waschsende oder fallende Folgen verwendet man die Bezeichnung *monotone Folgen*.

Man stelle sich nun eine wachsende Folge vor, die aber dennoch beschränkt ist. Muss eine solche Folge konvergieren? Das hängt vom angeordneten Körper ab! Innerhalb der rationalen Zahlen sind bspw. die mit dem Heronverfahren konstruierten Folgen monoton wachsend (wenn man mit einem zu kleinen Startwert anfängt) und auch beschränkt (durch jede rationale Zahl, deren Quadrat größer als a ist), sie besitzen aber im Allgemeinen keinen Limes in $\mathbb{Q}$. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, denen wir uns in der nächsten Vorlesung zuwenden, sind gerade dadurch ausgezeichnet, dass darin jede wachsende, nach oben beschränkte Folge einen Grenzwert besitzt.

Cauchy-Folgen

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man beispielsweise die durch das baybylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in einem beliebigen angeordneten Körper betrachten, in dem $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Definition 6.5. Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Lemma 6.6. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann ist eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge genau dann, wenn folgende Bedingung gilt: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m \geq n_0$ die Abschätzung $|x_m - x_{n_0}| \leq \epsilon$ gilt.*

Beweis. Eine Cauchy-Folge erfüllt auch die angegebene Bedingung, da man ja $n_0 = n$ setzen kann. Für die Umkehrung sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die zweite Bedingung gilt insbesondere für $\epsilon/2$, d.h. es gibt ein n_0 derart, dass für jedes $m \geq n_0$ die Abschätzung $|x_m - x_{n_0}| \leq \epsilon/2$. Damit gilt aufgrund der Dreiecksungleichung für beliebige $m, n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_m - x_n| \;\leq\; |x_m - x_{n_0}| + |x_n - x_{n_0}| \;\leq\; \epsilon/2 + \epsilon/2 \;=\; \epsilon,$$

so dass eine Cauchy-Folge vorliegt. □

SATZ 6.7. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit Grenzwert x. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq n_0 \,.$$

Für beliebige $n, m \geq n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \;\leq\; |x_n - x| + |x - x_m| \;=\; \epsilon/2 + \epsilon/2 \;=\; \epsilon.$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. □

LEMMA 6.8. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende, nach oben beschränkte Folge. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei $b \in K$ eine obere Schranke, also $x_n \leq b$ für alle Folgenglieder x_n. Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für jedes n_0 ein $m > n_0$ gibt mit $x_m - x_{n_0} \geq \epsilon$ (wir können die Betragstriche weglassen). Wir können daher induktiv eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen definieren durch

$$n_0 = 0\,,$$

$$n_1 > n_0 \text{ so, dass } x_{n_1} - x_{n_0} \geq \epsilon\,,$$

$$n_2 > n_1 \text{ so, dass } x_{n_2} - x_{n_1} \geq \epsilon\,,$$

etc. Andererseits gibt es aufgrund des Archimedesaxioms ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k\epsilon > b - x_0\,.$$

Die Summe der ersten k Differenzen der Teilfolge x_{n_j}, $j \in \mathbb{N}$, ergibt

$$\begin{aligned} x_{n_k} - x_0 &= (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}) + \cdots \\ &\geq k\epsilon \\ &> b - x_0. \end{aligned}$$

Dies impliziert $x_{n_k} > b$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass b eine obere Schranke der Folge ist. □

Der Körper der reellen Zahlen

Definition 6.9. Es sei K ein angeordneter Körper. Er heißt *vollständig* oder *vollständig angeordnet*, wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert (also in K einen Konvergenzpunkt besitzt).

Definition 6.10. Einen archimedisch angeordneten vollständigen Körper nennt man *Körper der reellen Zahlen*. Er wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Die reellen Zahlen sind also ein vollständig und archimedisch angeordneter Körper. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ gibt, die beide für sich genommen vollständig und archimedisch angeordnete Körper sind, so kann man eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_1$ nach $\mathbb{R}_2$ angeben, der alle mathematischen Strukturen erhält (sowas nennt man einen Isomorphismus).

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man die Vorstellung einer „kontinuierlichen Zahlengerade“ zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengeren mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von $\mathbb{Q}$ aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit einer geeigneten Identifizierung. Darauf werden wir hier verzichten.

Statt von einem vollständig und archimedisch angeordneten Körper werden wir von nun an von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sprechen. Als Beweismittel sind aber lediglich die genannten Axiome erlaubt.

Abbildungsverzeichnis