Fachbereich Mathematik/Informatik **25. Juni 2011**
Prof. Dr. H. Brenner

Reelle und angewandte Analysis (Mathematik III)

Klausur mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkäre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer per Aushang oder im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	4	3	4	4	6	2	4	5	7	5	3	9	64
erhaltene Pkt.:															

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *abzählbare* Menge.
(2) Eine *σ-Algebra* auf einer Menge M.
(3) Der *Kegel* zu einer Grundmenge (Basis) $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und einer Spitze $P \in \mathbb{R}^3$.
(4) Ein *zusammenhängender* topologischer Raum X.
(5) Die *Tangentialabbildung in einem Punkt* $P \in M$ zu einer differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow N,$$

wobei M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind.
(6) Das *Wegintegral* zu einer 1-Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M bezüglich einer stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [a,b] \to M$.
(7) Eine *geschlossene Differentialform* ω auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M.
(8) Eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand*.

Lösung

(1) Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn sie leer ist oder wenn es eine surjektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow M$$

gibt.
(2) Ein Teilmengensystem $\mathcal{A}$ auf einer Menge M heißt *σ-Algebra*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.
   (a) Es ist $M \in \mathcal{A}$.
   (b) Mit $T \in \mathcal{A}$ gehört auch das Komplement $M \setminus T$ zu $\mathcal{A}$.
   (c) Für jede abzählbare Familie $T_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, ist auch

$$\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}\,.$$

(3) Unter dem Kegel versteht man die Menge

$$K_B = \{P + t(Q-P) \,|\, Q \in B,\, t \in [0,1]\}\,.$$

(4) Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es in X genau zwei Teilmengen gibt (nämlich $\emptyset$ und den Gesamtraum X), die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.
(5) Unter der Tangentialabbildung im Punkt P versteht man die Abbildung

$$T_PM \longrightarrow T_{\varphi(P)}N,\ [\gamma] \longmapsto [\varphi \circ \gamma].$$

(6) Das Wegintegral ist durch

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^* \omega$$

definiert.

(7) Eine differenzierbare Differentialform ω auf M heißt *geschlossen*, wenn ihre äußere Ableitung $d\omega = 0$ ist.

(8) Ein topologischer Hausdorff-Raum M heißt eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand, wenn es eine offene Überdeckung $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Karten

$$\alpha_i : U_i \longrightarrow V_i$$

gibt, wobei die $V_i \subseteq H \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen im euklidischen Halbraum und die Übergangsabbildungen

$$\alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : V_i \cap \alpha_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow V_j \cap \alpha_j(U_i \cap U_j)$$

Diffeomorphismen sind.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Der *Eindeutigkeitssatz für Maße.*
(2) Die *Tschebyschow-Abschätzung* (Tschebyschow-Ungleichung) für eine messbare nichtnegative Funktion
$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
auf einem σ-endlichen Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$.
(3) Die *Formel für das Volumen des Rotationskörpers* (zum Subgraphen) zu einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(4) Der *Satz von Stokes* für Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Lösung

(1) Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und es sei $\mathcal{E}$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für $\mathcal{A}$. Es seien μ_1 und μ_2 zwei Maße auf $(M, \mathcal{A})$, die auf $\mathcal{E}$ übereinstimmen. Es gebe eine Ausschöpfung $M_n \uparrow M$ mit $M_n \in \mathcal{E}$ und mit $\mu_1(M_n) = \mu_2(M_n) < \infty$. Dann ist
$$\mu_1 \,=\, \mu_2.$$
(2) Für jedes $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt die Abschätzung
$$\int_M f \, d\mu \,\geq\, a \cdot \mu\{x \in M |\, f(x) \geq a\}.$$
(3) Der durch (den Subgraphen von) f definierte Rotationskörper K besitzt das Volumen
$$\lambda^3(K) \,=\, \pi \cdot \int_{[a,b]} (f(t))^2 \, d\lambda(t) \,=\, \pi \cdot \int_a^b (f(t))^2 \, dt.$$
(4) Es sei M eine n-dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und mit abzählbarer Topologie, und es sei ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Differentialform mit kompaktem Träger auf M. Dann ist
$$\int_M d\omega \,=\, \int_{\partial M} \omega.$$

Aufgabe 3. (4 (2+2) Punkte)

Eine Bratpfanne hat einen Durchmesser von 30 cm und wird mit Öl und mit 25 kreisrunden Bratkartoffeln überschneidungsfrei bedeckt, die alle einen Durchmesser von 4 cm und eine Höhe von $0,5$ cm haben. Das Öl bildet unterhalb der Bratkartoffeln einen dünnen Ölfilm von $0,1$ mm Höhe und erreicht in den Zwischenräumen eine Höhe von 1 mm.

a) Wie viel Öl befindet sich in der Pfanne (rechne mit $\pi = 3,14$; Einheit nicht vergessen)?

b) Welche maßtheoretischen Gesetzmäßigkeiten wurden bei der Berechnung von a) verwendet?

Lösung

a) Die Grundfläche der Pfanne ist $15^2\pi = 225\pi$ und die Grundfläche einer Bratkartoffel ist $2^2\pi = 4\pi$ (in Quadratzentimetern). Daher werden $25 \cdot 4 = 100\pi$ Quadratzentimeter von den Kartoffeln bedeckt und 125π Quadratzentimeter nicht. Daher ist die Ölmenge in Kubikzentimetern

$$100\pi \cdot 0,01 + 125\pi \cdot 0,1 \;=\; \pi + 12,5\pi \;=\; 13,5\pi \;\cong\; 13,5 \cdot 3,14 \;=\; 42,39.$$

In der Pfanne befindet sich also $42,39$ Kubikzentimeter Öl.

b) Es wurde dabei die Formel für die Kreisfläche (für die Grundfläche der Pfanne und der Kartoffeln), die Produktformel für das Maß (bei der Berechnung der Ölmenge aus Grundfläche und Höhe) einer Produktmenge und das Additivitätsprinzip für disjunkte Teilmengen (bei der Zerlegung in den bedeckten und den unbedeckten Teil) angewendet.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Berechne das Volumen des von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelotops.

Lösung

Das Parallelotop ist das Bild des Einheitswürfels unter der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 7 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung. Nach einem Satz der Vorlesung ist sein Volumen gleich dem Betrag der Determinante dieser Matrix. Wir berechnen die Determinante mittels der Regel von Sarrus, d.h. wir betrachten

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\det M \,=\, 10 - 84 + 105 + 14 \,=\, 129 - 84 \,=\, 45.$$

Das Volumen ist also 45.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Es sei M eine Menge und es sei $T_n \uparrow M$ eine Ausschöpfung von M mit Teilmengen $T_n \subseteq M$, $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \subseteq M \times \mathbb{R}$ der Subgraph zur Indikatorfunktion e_{T_n}. Zeige, dass die A_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Ausschöpfung von $M \times [0,1]$ bilden.

Lösung

Der Subgraph zur Indikatorfunktion e_{T_n} ist

$$\begin{aligned}
A_n &= \{(x,t) | \, x \in M, \, 0 \le t \le e_{T_n}(x)\} \\
&= \{(x,t) | \, x \in T_n, \, 0 \le t \le e_{T_n}(x)\} \cup \{(x,t) | \, x \in M \setminus T_n, \, 0 \le t \le e_{T_n}(x)\} \\
&= \{(x,t) | \, x \in T_n, \, 0 \le t \le 1\} \cup \{(x,t) | \, x \in M \setminus T_n, \, 0 \le t \le 0\} \\
&= T_n \times [0,1] \cup (X \setminus T_n) \times \{0\} \\
&= T_n \times [0,1] \cup X \times \{0\}.
\end{aligned}$$

Wegen $T_n \subseteq T_{n+1}$ ist somit auch $A_n \subseteq A_{n+1}$. Offenbar ist $A_n \subseteq M \times [0,1]$. Für ein beliebiges $(x,t) \in M \times [0,1]$ gibt es aufgrund der Ausschöpfungseigenschaft ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in T_n$. Für dieses n ist auch $(x,t) \in A_n$, so dass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = M \times [0,1]$ gilt. Also liegt eine Ausschöpfung vor.

AUFGABE 6. (4 Punkte)

Beweise die Tschebyschow-Abschätzung (Tschebyschow-Ungleichung) für eine messbare nichtnegative Funktion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

auf einem σ-endlichen Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$.

Lösung

Es sei

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare nichtnegative Funktion und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Es sei $T = \{x \in M \mid f(x) \geq a\}$. Dann ist

$$T \times [0, a] \subseteq S(f)$$

(im Subgraphen), also

$$a \cdot \mu(T) = (\mu \otimes \lambda^1)(T \times [0, a]) \leq (\mu \otimes \lambda^1)(S(f)) = \int_M f \, d\mu.$$

Aufgabe 7. (6 (3+3) Punkte)

Es sei G der Subgraph der Sinusfunktion auf dem Intervall $[0,\pi]$, wobei G mit dem zweidimensionalen Borel-Lebesgue-Maß λ^2 versehen sei. Berechne die beiden folgenden Integrale.

a) $\int_G x\, d\lambda^2$

b) $\int_G y\, d\lambda^2$

Lösung

a) Aufgrund des Cavalieri-Prinzips ist

$$\begin{aligned}\int_G x\, d\lambda^2 &= \int_0^\pi \Big(\int_0^{\sin\, x} x\, dy\Big)\, dx \\ &= \int_0^\pi x \sin\, x\ dx \\ &= (\sin\, x - \ x\cos\, x\,)|_0^\pi \\ &= \pi.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_G y\, d\lambda^2 &= \int_0^\pi \Big(\int_0^{\sin\, x} y\, dy\Big)\, dx \\ &= \int_0^\pi \Big(\big(\frac{1}{2}y^2\big)|_0^{\sin\, x}\,\Big)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2\, x\ dx \\ &= \frac{1}{4}(x - \ \sin\, x\ \ \cos\, x\,)|_0^\pi \\ &= \frac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

Aufgabe 8. (2 Punkte)
Bestimme, ob die beiden Basen des $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Lösung

Die Determinante links ist

$$2 \cdot 7 - 4 \cdot (-5) = 14 + 20 = 34$$

und die Determinante rechts ist

$$(-3)(-5) - 6 \cdot 2 = 15 - 12 = 3.$$

Da beide Determinanten positiv sind, repräsentieren sie die gleiche Orientierung des $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Zeige, dass die drei eindimensionalen Mannigfaltigkeiten $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, |(x,y)| = 1\}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ paarweise nicht homöomorph sind.

Lösung

Als abgeschlossene beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist der Einheitskreis kompakt (Satz von Heine-Borel). Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind hingegen nicht kompakt, da sie unbeschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. Also ist $S^1 \ncong \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die reelle Gerade ist zusammenhängend, wie aus dem Zwischenwertsatz folgt. Dagegen ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht zusammenhängend, da man

$$\mathbb{R}_+ = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap [0, \infty] = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap]0, \infty]$$

schreiben kann, so dass man eine sowohl offene als auch abgeschlossene nichtleere Teilmenge erhält. Also ist $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Sei X ein Torus. Man gebe eine surjektive differenzierbare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow X$$

an derart, dass auch die Tangentialabbildung

$$T_P(\varphi) : T_P\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\varphi(P)}X$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ surjektiv ist.

Lösung

Wir schreiben den Torus als $X = S^1 \times S^1$ mit dem Einheitskreis $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, |(x,y)| = 1\}$. Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times S^1, \, (u,v) \longmapsto (\cos u \, , \, \sin u \, , \, \cos v \, , \, \sin v \,),$$

ist surjektiv, da es sich in den beiden Komponenten um die Standardparametrisierung des Einheitskreises handelt. Auch die Surjektivität der Tangentialabbildung lässt sich komponentenweise überprüfen, da der Tangentialraum einer Produktmannigfaltigkeit das Produkt der Tangentialräume ist. Die Ableitung von

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, t \longmapsto (\cos t \, , \, \sin t \,),$$

ist $(- \sin t \, , \, \cos t \,) \neq (0,0)$, so dass dieser Bildvektor stets den eindimensionalen Tangentialraum des Einheitskreises im Bildpunkt aufspannt.

Aufgabe 11. (7 (3+4) Punkte)

Wir betrachten die differenzierbaren Abbildungen

$$\gamma : [1, c] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, t^3),$$

(mit $c \geq 1$) und

$$\varphi : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u, v) \longmapsto (u^3, u^2 + v^2, u^{-1}v^{-1}),$$

und die Differentialform

$$\omega = (x - y)dx - z^2 dy + dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

a) Berechne die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$ auf dem $\mathbb{R}^2$.

b) Berechne das Wegintegral zur Differentialform $\varphi^*\omega$ zum Weg γ in Abhängigkeit von c.

Lösung

a) Die zurückgezogene Differentialform ist

$$\begin{aligned}
& \varphi^*((x - y)dx - z^2 dy + dz) \\
= \ & (u^3 - u^2 - v^2)d(u^3) - u^{-2}v^{-2}d(u^2 + v^2) + d(u^{-1}v^{-1}) \\
= \ & 3(u^5 - u^4 - u^2v^2)du - 2u^{-1}v^{-2}du - 2u^{-2}v^{-1}dv - u^{-2}v^{-1}du - u^{-1}v^{-2}dv \\
= \ & (3u^5 - 3u^4 - 3u^2v^2 - 2u^{-1}v^{-2} - u^{-2}v^{-1})du + (-2u^{-2}v^{-1} - u^{-1}v^{-2})dv.
\end{aligned}$$

b) Das Wegintegral ist

$$\begin{aligned}
& \int_1^c (3t^5 - 3t^4 - 3t^2t^6 - 2t^{-1}t^{-6} - t^{-2}t^{-3})dt + (-2t^{-2}t^{-3} - t^{-1}t^{-6})dt^3 \\
= \ & \int_1^c (3t^5 - 3t^4 - 3t^8 - 2t^{-7} - t^{-5})dt + (-2t^{-5} - t^{-7})3t^2dt \\
= \ & \int_1^c (3t^5 - 3t^4 - 3t^8 - 2t^{-7} - t^{-5} - 6t^{-3} - 3t^{-5})dt \\
= \ & \int_1^c (-3t^8 + 3t^5 - 3t^4 - 6t^{-3} - 4t^{-5} - 2t^{-7})dt \\
= \ & (-\frac{1}{3}t^9 + \frac{1}{2}t^6 - \frac{3}{5}t^5 + 3t^{-2} + t^{-4} + \frac{1}{3}t^{-6})|_1^c \\
= \ & -\frac{1}{3}c^9 + \frac{1}{2}c^6 - \frac{3}{5}c^5 + 3c^{-2} + c^{-4} + \frac{1}{3}c^{-6} - (-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + 3 + 1 + \frac{1}{3}) \\
= \ & -\frac{1}{3}c^9 + \frac{1}{2}c^6 - \frac{3}{5}c^5 + 3c^{-2} + c^{-4} + \frac{1}{3}c^{-6} - \frac{39}{10}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 12. (5 Punkte)
Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (xyz^2, xy - z^3).$$

Berechne die Matrix der Abbildung

$$\bigwedge^2 T_P(\varphi) : \bigwedge^2 T_P\mathbb{R}^3 \longrightarrow \bigwedge^2 T_{\varphi(P)}\mathbb{R}^2$$

im Punkt $P = (1, 3, 5)$ bzgl. einer geeigneten Basis.

Lösung

Die Jacobimatrix von φ ist allgemein

$$\begin{pmatrix} yz^2 & xz^2 & 2xyz \\ y & x & -3z^2 \end{pmatrix}.$$

Für den Punkt $P = (1, 3, 5)$ liegt daher die Jacobimatrix

$$\begin{pmatrix} 75 & 25 & 30 \\ 3 & 1 & -75 \end{pmatrix}$$

vor. Diese Matrix beschreibt die lineare Abbildung

$$L : T_P\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \longrightarrow T_{\varphi(P)}\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$$

bzgl. den Standardbasen. Wir bestimmen die Matrixdarstellung für die Abbildung

$$\bigwedge^2 L : \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \longrightarrow \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$$

bzgl. den Basen $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$ (links) und $e_1 \wedge e_2$ (rechts). Dazu müssen wir die Bilder dieser Dachprodukte ausrechnen. Es ist

$$\begin{aligned} (\bigwedge^2 L)(e_1 \wedge e_2) &= L(e_1) \wedge L(e_2) \\ &= (75e_1 + 3e_2) \wedge (25e_1 + 1e_2) \\ &= 75e_1 \wedge e_2 + 75e_2 \wedge e_1 \\ &= 75e_1 \wedge e_2 - 75e_1 \wedge e_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bigwedge^2 L)(e_1 \wedge e_3) &= L(e_1) \wedge L(e_3) \\ &= (75e_1 + 3e_2) \wedge (30e_1 - 75e_2) \\ &= -75^2 e_1 \wedge e_2 + 90e_2 \wedge e_1 \\ &= (-5625 - 90)e_1 \wedge e_2 \\ &= -5715e_1 \wedge e_2, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\bigwedge^2 L)(e_2 \wedge e_3) &= L(e_2) \wedge L(e_3) \\
&= (25e_1 + 1e_2) \wedge (30e_1 - 75e_2) \\
&= -1875e_1 \wedge e_2 + 30e_2 \wedge e_1 \\
&= -1905e_1 \wedge e_2.
\end{aligned}$$

Die beschreibende Matrix ist also

$$(0, -5715, -1905)\,.$$

AUFGABE 13. (3 (2+1) Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t),$$

die durch

$$f(t) = \frac{\sin^3(t^4)}{1+t^2}$$

a) Berechne die äußere Ableitung von f.

b) Berechne die äußere Ableitung von $f dt$.

Lösung

a) Es ist $df = f' dt$, und zwar ist nach der Quotientenregel

$$\begin{aligned} f' &= \frac{(1+t^2)3\sin^2(t^4)\ \cos(t^4)\,4t^3 - 2t\sin^3(t^4)}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{12(t^3+t^5)\sin^2(t^4)\ \cos(t^4)\ - 2t\sin^3(t^4)}{1+2t^2+t^4}. \end{aligned}$$

b) Die äußere Ableitung von $f dt$ ist $f' dt \wedge dt = 0$.

Aufgabe 14. (9 Punkte)

Es sei $M \neq \emptyset$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Zeige, dass es eine Kette von abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$$

gibt derart, dass die abgeschlossene Untermannigfaltigkeit M_i die Dimension i besitzt.

Lösung

Es sei $P \in M$ ein Punkt und $P \in U$ eine offene Kartenumgebung zusammen mit einer Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n,$$

wobei $V = B(0,3)$ die offene Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius 3 sei und wobei $\alpha(P) = 0$ gelte. Für $i = 1, \ldots, n-1$ betrachten wir

$$B_i = \{x \in V \,|\, (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,\, x_{i+2} = 0,\, x_{i+3} = 0, \ldots, x_n = 0\}\,.$$

Es ist also B_{n-1} die Kugeloberfläche mit Mittelpunkt $(1, 0, \ldots, 0)$ und Radius 1, B_{n-2} ist darin der durch $x_n = 0$ definierte „Äquator“ u.s.w. Man erhält B_i aus B_{i+1}, indem man zusätzlich noch $x_{i+2} = 0$ setzt. Daher liegt eine absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen

$$B_{n-1} \supseteq B_{n-2} \supseteq \ldots \supseteq B_1 \supseteq B_0$$

vor (B_0 besteht aus den beiden Punkten $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$). Wir fassen B_i als die Faser über dem Nullpunkt der Abbildung

$$\varphi_i : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-i},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto ((x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1, x_{i+2}, \ldots, x_n),$$

auf. Die Jacobimatrix dieser Abbildung ist

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - 2 & 2x_2 & \ldots & 2x_{i+1} & 2x_{i+2} & \ldots & 2x_{n-1} & 2x_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Rang dieser Matrix ist nur bei $x_1 = 1$, $x_2 = \cdots = x_{i+1} = 0$ kleiner als $n - i$, ein solcher Punkt liegt also nicht auf B_i. Das bedeutet, dass die Abbildung φ_i in der Faser B_i regulär ist, so dass B_i aufgrund des Satzes über implizite Abbildungen eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von V der Dimension i ist.

Wir setzen nun $M_i = \alpha^{-1}(B_i)$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $M_n = M$. Da die B_i kompakt sind, sind die M_i auch abgeschlossene Teilmengen in M. Da die

Bedingung für eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit eine lokale Eigenschaft ist, handelt es sich um abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten von M.