Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2013/2014

Analysis I

Vorlesung 20

Ableitung von Potenzreihen

SATZ 20.1. *Es sei*

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$. *Dann ist auch die formal abgeleitete Potenzreihe*

$$\tilde{g} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

konvergent mit demselben Konvergenzradius. Die durch die Potenzreihe g *dargestellte Funktion* f *ist in jedem Punkt* $z \in U(a, R)$ *differenzierbar mit*

$$f'(z) = \tilde{g}(z) \, .$$

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}_+$, $s < R$, vorgegeben und sei r mit $s < r < R$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, r^n$. Wegen $n \leq (\frac{r}{s})^n$ für n hinreichend groß ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n \, |a_n| \, s^{n-1} &= \sum_{n=1}^{N} n \, |a_n| \, s^{n-1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} n \, |a_n| \, s^{n-1} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} n \, |a_n| \, s^{n-1} + \frac{1}{s} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \, r^n, \end{aligned}$$

so dass die Potenzreihe $\tilde{g}$ in $B(a, s)$ und somit in $U(a, R)$ konvergiert (dafür, dass der Konvergenzradius von $\tilde{g}$ nicht größer als R ist, siehe Aufgabe 20.2). Die Potenzreihe

$$\rho(z) \; = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-1}$$

ist ebenfalls in dieser Kreisscheibe konvergent und besitzt in a den Wert 0. Daher zeigt die Gleichung

$$f(z) = f(a) + a_1(z-a) + \rho(z)(z-a) \, ,$$

dass f in a differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(a) = a_1 = \tilde{g}(a)$. Sei nun $b \in U(a, R)$. Nach dem Entwicklungssatz gibt es eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt b,

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n \, ,$$

deren dargestellte Funktion mit der durch g dargestellten Funktion in einer offenen Umgebung von b übereinstimmt, und wobei

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1}$$

gilt. Daher gilt nach dem schon Bewiesenen (angewendet auf h und die formale Potenzreihenableitung $\tilde{h}$)

$$f'(b) \,=\, \tilde{h}(b) \,=\, b_1 \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1} \,=\, \tilde{g}(b).$$

□

Satz 20.2. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp z,$$

ist differenzierbar mit

$$\exp'(z) = \exp z\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 20.1 ist

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= \exp z. \end{aligned}$$

□

Korollar 20.3. *Die Ableitung des natürlichen Logarithmus*

$$\ln :\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist

$$\ln' \colon\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.4. □

Korollar 20.4. *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion*

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto x^\alpha,$$

differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\,.$$

Beweis. Nach Aufgabe 17.10 ist

$$x^\alpha = \exp(\alpha\ \ln x)\,.$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 20.2 und Korollar 20.3 gleich

$$(x^\alpha)' \;=\; (\exp(\alpha\ \ln x))' \;=\; \frac{\alpha}{x} \cdot \exp(\alpha\ \ln x) \;=\; \frac{\alpha}{x} x^\alpha \;=\; \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

Korollar 20.5. *Für die eulersche Zahl gilt die Gleichheit*

$$e \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \;=\; \exp 1.$$

Beweis. Die äußeren Gleichheiten sind Definitionen. Aufgrund von Korollar 20.3 ist $\ln'(1) = 1$. Dies bedeutet aufgrund der Definition des Differentialquotienten insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Wir schreiben die Folgenglieder der linken Seite als $n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ und wenden darauf die Exponentialfunktion an. Daraus ergibt sich unter Verwendung der Stetigkeit und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\exp 1 \;&=\; \exp(\lim_{n\to\infty}(n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n}))) \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \exp(n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})) \\
&=\; \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \\
&=\; e.
\end{aligned}$$

□

Satz 20.6. *Die Sinusfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \sin z\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\sin'(z) \;=\; \cos z$$

und die Kosinusfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \cos z\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\cos'(z) = -\sin z\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.10. □

Die Zahl π

Die Zahl π ist der Flächeninhalt bzw. der halbe Kreisumfang eines Kreises mit Radius 1. Um darauf eine präzise Definition dieser Zahl aufzubauen müsste man zuerst die Maßtheorie (bzw. die Länge von „krummen Kurven") entwickeln. Auch die trigonometrischen Funktionen haben eine intuitive Interpretation am Einheitskreis, doch auch diese setzt das Konzept der Bogenlänge voraus. Ein alternativer Zugang ist es, die Zahl π über analytische Eigenschaften der durch ihre Potenzreihen definierten Funktionen Sinus und Kosinus zu definieren und dann erst nach und nach die Beziehung zum Kreis herzustellen.

Lemma 20.7. *Die Kosinusfunktion besitzt im reellen Intervall* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle.*

Beweis. Wir betrachten die Kosinusreihe

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Für $x = 0$ ist $\cos 0 = 1$. Für $x = 2$ kann man geschickt klammern und erhält

$$\begin{aligned}
\cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \ldots \\
&= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{4}{3 \cdot 4}\right) - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{4}{7 \cdot 8}\right) - \ldots \\
&= 1 - 2(2/3) - \ldots \\
&\leq -1/3.
\end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also mindestens eine Nullstelle im angegebenen Intervall. Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachten wir die Ableitung des Kosinus, diese ist nach Fakt *****

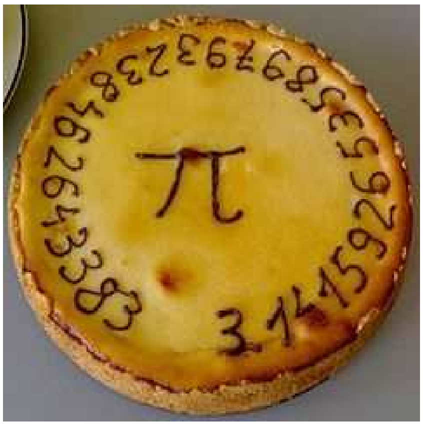
$$\cos' x = -\sin x\,.$$

Es genügt zu zeigen, dass der Sinus im Intervall $]0,2[$ positiv ist, denn dann ist das Negative davon stets negativ und der Kosinus ist dann nach Satz 19.5 im angegebenen Intervall streng fallend, so dass es nur eine Nullstelle gibt. Für $x \in]0,2]$ gilt

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\
&= x\left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq\ x\left(1-\frac{4}{3!}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{4}{6\cdot 7}\right)+\ldots\\
&\geq\ x/3\\
&>\ 0.
\end{aligned}
$$

□



Eine rationale Approximation der Zahl π auf einem π-Pie.

Definition 20.8. Es sei r die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch

$$\pi := 2r\,.$$

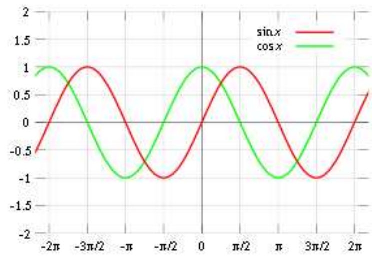
Satz 20.9. *Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion erfüllen in* $\mathbb{C}$ *folgende* Periodizitätseigenschaften.

(1) *Es ist* $\cos\,(z+2\pi) = \cos\,z$ *und* $\sin\,(z+2\pi) = \sin\,z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(2) *Es ist* $\cos\,(z+\pi) = -\cos\,z$ *und* $\sin\,(z+\pi) = -\sin\,z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(3) *Es ist* $\cos\,(z+\pi/2) = -\sin\,z$ *und* $\sin\,(z+\pi/2) = \cos\,z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(4) *Es ist* $\cos\,0 = 1$, $\cos\,\pi/2 = 0$, $\cos\,\pi = -1$, $\cos\,3\pi/2 = 0$ *und* $\cos\,2\pi = 1$.
(5) *Es ist* $\sin\,0 = 0$, $\sin\,\pi/2 = 1$, $\sin\,\pi = 0$, $\sin\,3\pi/2 = -1$ *und* $\sin\,2\pi = 0$.

Beweis. Aufgrund der Kreisgleichung

$$(\cos\,z)^2 + (\sin\,z)^2 = 1$$

ist $(\sin\,\frac{\pi}{2})^2 = 1$, also ist $\sin\,\frac{\pi}{2} = 1$ wegen der Überlegung im Beweis zu Lemma 20.7. Daraus folgen mit den Additionstheoremen die in (3) angegebenen Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus. Es genügt daher, die Aussagen für den Kosinus zu beweisen. Alle Aussagen folgen dann aus der Definition von π und aus (3). □



KOROLLAR 20.10. *Die reelle Sinusfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion*

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1],$$

und die reelle Kosinusfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1].$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.11. $\square$

Abbildungsverzeichnis