Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2013/2014

Analysis I

Vorlesung 14

Cauchy-Produkt von Reihen

Definition 14.1. Zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ komplexer Zahlen heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

Lemma 14.2. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut konvergent und für die Summe gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Beweis. Wir müssen für die Partialsummen

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \; y_n = \sum_{j=0}^{n} b_j \text{ und } z_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

zeigen, dass z_n gegen den Limes der Folge $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned} |z_n - x_n y_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n} c_k - \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) \right| \\ &= \left| \sum_{0 \leq i \leq n,\, 0 \leq j \leq n,\, i+j > n} a_i b_j \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq i \leq n,\, 0 \leq j \leq n,\, i+j > n} |a_i| \, |b_j| \\ &\leq \left(\sum_{n/2 < i \leq n} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{n} |b_j| \right) \\ &\quad + \left(\sum_{n/2 < j \leq n} |b_j| \right) \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| \right) \end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{n/2 < i \leq n} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right) + \left(\sum_{n/2 < j \leq n} |b_j| \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right).$$

Da die beiden Reihen absolut konvergieren, und $\sum_{n/2<i\leq n} |a_i|$ und $\sum_{n/2<j\leq n} |b_j|$ Nullfolgen sind (siehe Aufgabe 14.8), ist die rechte Seite insgesamt eine Nullfolge. Daher konvergiert die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen das Produkt der Grenzwerte. Die absolute Konvergenz folgt aus dem bisher Bewiesenen mit dem Majorantenkriterium aus der Abschätzung $|c_k| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i|\,|b_{k-i}|$. □

Potenzreihen

Definition 14.3. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und z eine weitere komplexe Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

die *Potenzreihe* in z zu den Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Durch Wahl geeigneter Koeffizienten kann man jede Reihe als Potenzreihe zu einer fixierten Basis $z \in \mathbb{C}$ ansehen. Bei Potenzreihen ist es aber wichtig, dass man z variieren lässt und dann die Potenzreihe im Konvergenzbereich eine Funktion in z darstellt.

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon das letzte Mal kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, die für $|z| < 1$ konvergiert und dort die Funktion $1/(1-z)$ darstellt. Eine weitere besonders wichtige Potenzreihe ist die Exponentialreihe, die für jede komplexe Zahl konvergiert und zur komplexen Exponentialfunktion führt.

Die Exponentialreihe und die komplexe Exponentialfunktion

Definition 14.4. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in z.

Dies ist also die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \ldots .$$

Satz 14.5. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

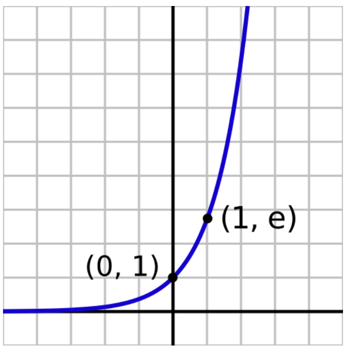
absolut konvergent.

Beweis. Für $z = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Dies ist für $n \geq 2\,|z|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz. $\square$

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die komplexe Exponentialfunktion definieren.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

Definition 14.6. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

heißt (komplexe) *Exponentialfunktion.*

Wir werden später sehen, dass diese Funktion für reelle Argumente die Exponentialfunktion zur Basis $\exp 1$ ist, und dass $\exp 1$ mit der früher eingeführten eulerschen Zahl e übereinstimmt.

Satz 14.7. *Für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w\,.$$

Beweis. Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!} \frac{w^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 14.2 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $z+w$ gleich

$$\frac{(z+w)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i w^{n-i} = c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen. □

KOROLLAR 14.8. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp z,$$

besitzt folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist* $\exp 0 = 1$.
(2) *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$. *Insbesondere ist* $\exp z \neq 0$.
(3) *Für ganze Zahlen* $n \in \mathbb{Z}$ *ist* $\exp n = (\exp 1)^n$.
(4) *Für reelles* z *ist* $\exp z \in \mathbb{R}_+$.
(5) *Für reelle Zahlen* $z > 0$ *ist* $\exp z > 1$ *und für* $z < 0$ *ist* $\exp z < 1$.
(6) *Die reelle Exponentialfunktion* [1] *ist streng wachsend.*

Beweis. (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp z \cdot \exp(-z) = \exp(z-z) = \exp 0 = 1$$

aufgrund von Satz 14.7. (3) folgt aus Satz 14.7 und (2). (4). Der Wert der Exponentialreihe für eine reelle Zahl ist wieder reell, da die reellen Zahlen in $\mathbb{C}$ abgeschlossen sind. Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp z = \exp\left(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\right) = \exp \frac{z}{2} \cdot \exp \frac{z}{2} = \left(\exp \frac{z}{2}\right)^2 \geq 0.$$

(5). Für reelles x ist $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$, so dass nach (4) ein Faktor ≥ 1 sein muss und der andere Faktor ≤ 1. Für $x > 0$ ist

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n = \exp(-x),$$

da ja für gerades n die Summationsglieder übereinstimmen und für ungerades n die linke Seite größer als die rechte ist. Also ist $\exp x > 1$. (6). Für reelle $w > z$ ist $w - z > 0$ und daher nach (5) $\exp(w-z) > 1$, also

$$\exp w = \exp(w - z + z) = \exp(w-z) \exp z > \exp z.$$

□

[1] Unter der reellen Exponentialfunktion verstehen wir hier die Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion auf die reellen Zahlen. Wir werden bald sehen, dass sie mit der Exponentialfunktion zur Basis e übereinstimmt.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Exp.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 3