Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Vorlesung 14

Gleichmäßige Stetigkeit

Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto 1/x,$$

ist stetig. In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}_+$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $f(U(x,\delta)) \subseteq U(f(x),\epsilon)$. Dabei hängt das δ nicht nur von der Zielgenauigkeit ϵ, sondern auch von x ab. Je kleiner x wird, desto steiler wird der Funktionsgraph und desto kleiner muss δ gewählt werden, damit das Bild der δ-Umgebung innerhalb der ϵ-Umgebung von $f(x)$ landet. Es gibt natürlich auch Funktionen, bei denen man zu jedem ϵ ein δ findet, dass für alle x die Stetigkeitseigenschaft sichert.

Definition 14.1. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft: Für alle $x, x' \in T$ mit $d(x,x') \leq \delta$ ist $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$.

Lemma 14.2. *Eine stetige Funktion*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall ist gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass es für alle $\delta > 0$ ein Punktepaar $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| \leq \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$ gibt. Insbesondere gibt es somit für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine Punktepaar $x_n, y_n \in [a,b]$ mit $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge x_n eine in $\mathbb{R}$ konvergente Teilfolge, deren Grenzwert, nennen wir ihn x, wegen der Abgeschlossenheit zum Intervall gehören muss. Die Glieder der Teilfolge besitzt die eingangs beschriebenen Eigenschaften, deshalb können wir direkt annehmen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen x. Wegen der Stetigkeit konvergieren dann nach Lemma 12.4 auch die beiden Bildfolgen $f(x_n)$ und $f(y_n)$ gegen $f(x)$. Es sei nun $\epsilon' < \frac{\epsilon}{2}$. Dann ist für n hinreichend groß sowohl $|f(x_n) - f(x)| \leq \epsilon'$ als auch $|f(y_n) - f(x)| \leq \epsilon'$. Dies ergibt mit der Dreiecksungleichung einen Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. $\square$

Grenzwerte von Funktionen

DEFINITION 14.3. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{K}$ ein Punkt. Es sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann heißt $b \in \mathbb{K}$ *Grenzwert* (oder *Limes*) von f in a, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert. In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x\to a} f(x) = b\,.$$

Dieser Begriff ist eigentlich nur dann sinnvoll, wenn es überhaupt Folgen in T gibt, die gegen a konvergieren. Eine typische Situation ist die folgende: Es sei I ein reelles Intervall, $a \in I$ sei ein Punkt darin und es sei $T = I \setminus \{a\}$. Die Funktion sei auf T, aber nicht im Punkt a definiert, und es geht um die Frage, inwiefern man f zu einer sinnvollen Funktion $\tilde{f}$ auf ganz I fortsetzen kann. Dabei soll $\tilde{f}(a)$ durch f bestimmt sein.

LEMMA 14.4. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{K}$ ein Punkt. Es seien $f\colon T \to \mathbb{K}$ und $g\colon T \to \mathbb{K}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren. Dann gelten folgende Beziehungen.*

(1) *Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

(2) *Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

(3) *Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in T$ und $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert in a, und zwar ist*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\,.$$

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Satz 8.10. □

LEMMA 14.5. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{K}$ ein Punkt. Es sei $f\colon T \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{K}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Es ist*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b\,.$$

(2) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in T$ mit $d(x, a) \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x), b) \leq \epsilon$ folgt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 13.6. □

Für eine stetige Funktion $f\colon T \to \mathbb{K}$ folgt daraus, dass sie sich zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}\colon T \cup \{a\} \to \mathbb{K}$ (durch $\tilde{f}(a) = b$) genau dann fortsetzen lässt, wenn der Limes von f in a gleich b ist.

Beispiel 14.6. Wir betrachten den Limes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x},$$

wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \geq -4$, ist. Für $x = 0$ ist der Ausdruck nicht definiert, und aus dem Ausdruck ist nicht direkt ablesbar, ob der Grenzwert existiert und welchen Wert er annimmt. Man kann den Ausdruck aber mit $\sqrt{x+4}+2$ erweitern, und erhält dann

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte können wir den Grenzwert von Zähler und Nenner ausrechnen, und es ergibt sich insgesamt $1/4$.

Fortsetzung von stetigen Funktionen

Definition 14.7. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine stetige Funktion und es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \mathbb{K}$. Dann heißt eine Abbildung

$$\tilde{f}\colon \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine *stetige Fortsetzung* von f, wenn $\tilde{f}$ stetig ist und $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in T$ gilt.

Satz 14.8. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,*

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine stetige Funktion und es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \mathbb{K}$, wobei $\tilde{T}$ aus Berührpunkten von T bestehe. Für jedes $a \in \tilde{T} \setminus T$ existiere der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$. Dann ist die durch

$$\tilde{f}(a) := \begin{cases} f(a)\,, & \text{falls } a \in T\,, \\ \lim_{x \to a} f(x), & \text{falls } a \in \tilde{T} \setminus T\,, \end{cases}$$

definierte Abbildung eine stetige Fortsetzung von f auf $\tilde{T}$.

Beweis. Sei $a \in \tilde{T}$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da a ein Berührpunkt von T ist und da der Grenzwert von f in a existiert (bei $a \in T$ existiert er aufgrund der Stetigkeit), gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f(x), \tilde{f}(a)) \leq \epsilon/2$ für alle $x \in T$, $d(x, a) \leq \delta$. Sei nun $y \in \tilde{T}$ mit $d(y, a) \leq \delta/2$. Es gibt ein $x \in T$ mit $d(x, y) \leq \delta/2$ und mit $d(f(x), \tilde{f}(y)) \leq \epsilon/2$. Wegen der ersten Abschätzung und der Voraussetzung an y ist $d(x, a) \leq \delta$. Insgesamt ist daher

$$d(\tilde{f}(a), \tilde{f}(y)) \leq d(\tilde{f}(a), f(x)) + d(f(x), \tilde{f}(y)) \leq \epsilon.$$

□

SATZ 14.9. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und $\overline{T}$ die Menge aller Berührpunkte von T. Es sei*

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$\tilde{f} \colon \overline{T} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 14.8 genügt es zu zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ für jedes $a \in \overline{T} \setminus T$ existiert. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in T, die gegen a konvergiert. Wir zeigen, dass dann auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Da diese Bildfolge in $\mathbb{K}$ ist, und $\mathbb{K}$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass eine Cauchy-Folge vorliegt. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ ist für alle $x, x' \in T$ mit

$$d(x, x') \leq \delta.$$

Wegen der Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es ein n_0 mit $d(x_n, a) \leq \delta/2$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $n, m \geq n_0$ gilt daher $d(x_n, x_m) \leq \delta$ und somit insgesamt

$$d(f(x_n), f(x_m)) \leq \epsilon.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass für jede gegen a konvergente Folge der Grenzwert der Bildfolge gleich ist. Dies ergibt sich aber sofort, wenn man für zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots$ betrachtet, die ebenfalls gegen a konvergiert, und für die der Limes der Bildfolge mit den Limiten der Teilbildfolgen übereinstimmt. □

KOROLLAR 14.10. *Es sei*

$$f \colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 14.9 und aus $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. □

Reelle Exponentialfunktionen

Für jede positve reelle Zahl b und $n \in \mathbb{Z}$ ist b^n eine positive reelle Zahl. Für eine weitere natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}_+$ und eine positive reelle Zahl y ist $y^{1/m}$ definiert. Für eine rationale Zahl $q = n/m$ ist daher $b^q = (b^n)^{1/m}$ definiert, und zwar ist dies unabhängig von der Wahl der Zähler und Nenner in der Darstellung von q.

Lemma 14.11. *Es sei b eine positive reelle ZahlDann besitzt die Funktion*

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto b^q,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
(2) *Es ist $(b^q)^{q'} = b^{q \cdot q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
(3) *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*
(4) *Für $b < 1$ ist f streng fallend.*
(5) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^q = a^q \cdot b^q$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 13.7. □

Lemma 14.12. *Es sei b eine positive reelle ZahlDann ist die Funktion*

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto b^q,$$

auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir betrachten Intervalle der Form $[-n, n]$ mit $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Monotonie ist

$$b^q \,\leq\, m \,:=\, \max\left(b^n, b^{-n}\right)$$

für alle $q \in [-n, n]$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Folge $\left(b^{1/k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1, daher gibt es insbesondere ein k derart, dass

$$\left|b^{1/k} - 1\right| \,\leq\, \epsilon/m$$

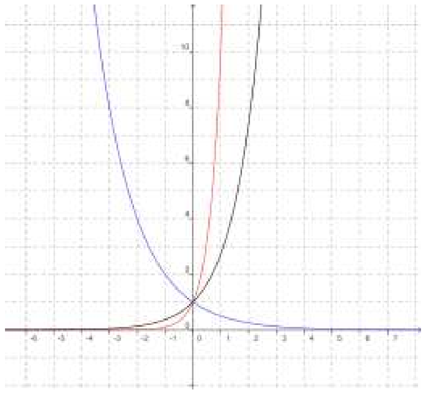
ist. Wir setzen $\delta = 1/k$. Dann gilt für zwei beliebige rationale Zahlen $q, q' \in [-n, n]$ mit

$$|q' - q| \,\leq\, \delta$$

unter Verwendung der Funktionalgleichung die Abschätzungen

$$\left|b^{q'} - b^q\right| \,=\, \left|b^{q'}/b^q - 1\right| b^q \,\leq\, \left|b^{q'-q} - 1\right| m \,\leq\, \epsilon/m \cdot m \,=\, \epsilon.$$

□



Die Exponentialfunktionen für die Basen $b = 10, \frac{1}{2}$ und e.

Aufgrund von Lemma 14.12 und Korollar 14.10 (mit einem beliebigen Intervall $[-n, n]$ statt ganz $\mathbb{Q}$.) lassen sich die zunächst nur auf $\mathbb{Q}$ definierten Exponentialfunktionen zu stetigen Funktionen auf den reellen Zahlen fortsetzen. In diesem Sinn ist die folgende Definition zu verstehen.

Definition 14.13. Sei b eine positive reelle Zahl. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$

heißt *Exponentialfunktion* zur *Basis* b.

Lemma 14.14. *Es sei b eine positive reelle ZahlDann besitzt die Exponentialfunktion*

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(2) *Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(3) *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*
(4) *Für $b < 1$ ist f streng fallend.*
(5) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 13.8. $\square$

Eine besondere Rolle spielt die Exponentialfunktion zur Basis $b = e$. Wir werden dafür bald eine weitere Beschreibung kennenlernen, die auch für komplexe Exponenten erklärt ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Exponentials(2).svg , Autor = Benutzer HB auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 6