Prof. Dr. H. Brenner, Dr. L. Katthän **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 4

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. Es sei $\Gamma = \{p, \neg q, r \rightarrow s\} \subseteq L^V$ (p, q, r, s seien Aussagevariablen). Welche der folgenden Aussagen lassen sich aus Γ ableiten?

$$p \rightarrow q,\ \neg p \rightarrow q,\ p \rightarrow \neg q,\ \neg p \rightarrow \neg q,\ r \rightarrow q,\ (r \rightarrow q) \rightarrow \neg p,$$
$$(s \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow \neg q),\ (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow s.$$

Aufgabe 4.2. Zeige, dass man aus $\Gamma = \{p\}$ unendlich viele Aussagen ableiten kann, die keine Tautologien sind.

Aufgabe 4.3. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagevariablenmenge V. Zeige die folgenden Regeln für die Ableitungsbeziehung (dabei seien $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_i$ Aussagen).

(1) Modus Ponens: Wenn $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, dann ist auch $\Gamma \vdash \beta$.
(2) Wenn $\Gamma \vdash \alpha$, so auch $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha$.
(3) Konjunktionsregel: $\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$ genau dann, wenn $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \beta$.
(4) Wenn $\Gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash \alpha_n$ und $\Gamma \vdash \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$, dann auch $\Gamma \vdash \beta$.
(5) Kettenschlussregel: Wenn $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ und $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$, dann auch $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$.
(6) Widerspruchsregel: Wenn $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \neg\alpha$, dann auch $\Gamma \vdash \beta$.
(7) Fallunterscheidungsregel: Wenn $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ und $\Gamma \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$, dann auch $\Gamma \vdash \beta$.

Aufgabe 4.4. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik über einer Aussagevariablenmenge V und es seien $\alpha, \beta \in L^V$. Zeige, dass

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$$

zu

$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

äquivalent ist.

Aufgabe 4.5. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagevariablenmenge V. Zeige, dass die Ableitungsbeziehung $\Gamma \vdash \alpha$ die Folgerungsbeziehung $\Gamma \vDash \alpha$ impliziert.

Aufgabe 4.6. Es sei L^V die Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagevariablenmenge V und es sei λ eine Wahrheitsbelegung der Variablen mit zugehöriger Interpretation I. Zeige, dass $I^{\vDash}$ maximal widerspruchsfrei ist.

Aufgabe 4.7. Führe die Einzelheiten im Beweis zu Lemma 4.7 für die Implikation durch.

Aufgabe 4.8. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine widerspruchsfreie Aussagenmenge, die unter Ableitungen abgeschlossen sei. Zeige, dass Γ nicht durch die Hinzunahme von endlich vielen Aussagen zu einer maximal widerspruchsfreien Aussagenmenge aufgefüllt werden kann.

Aufgabe 4.9. Bestimme zu jedem Ausdruck $\alpha \in L^V$ mit maximal acht Zeichen zur Aussagevariablenmenge $V = \{p, q\}$, ob er bei der durch $\lambda(p) = 1$, $\lambda(q) = 0$ fetgelegten Interpretation wahr oder falsch ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.10. (3 Punkte)

Es sei $\Gamma = \{p, \neg q \rightarrow r\} \subseteq L^V$ (p, q, r seien Aussagevariablen). Welche der folgenden Aussagen lassen sich aus Γ ableiten?

$$p \rightarrow q,\ \neg q \rightarrow p,\ \neg p \rightarrow r,\ \neg q \rightarrow r \wedge p,\ \neg r \rightarrow q,\ r \rightarrow (q \rightarrow \neg p)\ .$$

Aufgabe 4.11. (3 Punkte)

Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagevariablenmenge V. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Γ ist widersprüchlich.
(2) Für jedes $\beta \in L^V$ ist $\Gamma \vdash \beta$ und $\Gamma \vdash \neg\beta$.
(3) Es ist $\Gamma^{\vdash} = L^V$.

Aufgabe 4.12. (3 Punkte)

Es sei V eine Aussagevariablenmenge. Konstruiere eine Ausdrucksmenge $\Gamma \subseteq L^V$, die nicht maximal widerspruchsfrei ist, die aber durch die Hinzunahme einer beliebigen Aussagevariable oder einer negierten Aussagevariablen maximal widerspruchsfrei wird.