Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2010/2011

Mathematik III

Arbeitsblatt 69

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 69.1. Wir definieren auf $\overline{\mathbb{R}}$ eine Topologie, indem wir die Mengen

$$]a,b[\text{ (mit } a,b \in \mathbb{R}), \; [-\infty, a[\text{ (mit } a \in \mathbb{R}) \text{ und }]a,\infty] \text{ (mit } a \in \mathbb{R})$$

als Basis der Topologie nehmen. Zeige, dass $\mathbb{R}$ offen in dieser Topologie ist und die Unterraumtopologie zu dieser Topologie trägt.

AUFGABE 69.2. Zeige, dass die Borelmengen auf $\overline{\mathbb{R}}$ zu der in Aufgabe 69.1 eingeführten Topologie mit den in der Vorlesung direkt eingeführten Borel-Mengen übereinstimmen.

AUFGABE 69.3. Zeige, dass $\overline{\mathbb{R}}$ mit der in Aufgabe 69.1 eingeführten Topologie homöomorph zum abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ ist.

AUFGABE 69.4. Es sei X ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass die *Diagonale*

$$\triangle = \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}$$

eine messbare Teilmenge im Produktraum $X \times X$ ist.

AUFGABE 69.5. Beschreibe eine beliebige einfache Funktion mit Hilfe von Indikatorfunktionen.

AUFGABE 69.6. Zeige, dass die Summe und das Produkt von zwei einfachen Funktionen auf einem Messraum wieder einfach ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 69.7. (2 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und es seien

$$f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare Funktionen. Zeige, dass die Menge

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

messbar ist.

Aufgabe 69.8. (2 Punkte)

Zeige, dass die Summe und das Produkt von zwei σ-einfachen Funktionen auf einem Messraum wieder σ-einfach ist.

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *periodisch* mit *Periode* $L > 0$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(x + L)$$

gilt.

Aufgabe 69.9. (5 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion mit der Periode $L > 0$.

a) Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) f ist messbar.
(2) Die Einschränkung von f auf das Intervall $[0, L[$ ist messbar.
(3) Die Einschränkung von f auf jedes Intervall der Form $[a, a + L[$ ist messbar.

b) Zeige, dass diese Äquivalenz für die Stetigkeit nicht gelten muss.

Aufgabe 69.10. (5 Punkte)

Bestimme die approximierenden Funktionen $f_0, f_1, \ldots, f_5$ für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto x^2,$$

gemäß dem Beweis zu Lemma 69.11.

Aufgabe 69.11. (7 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei die Funktion f_n durch

$$f_n(x) = \frac{\lfloor f(x) \rfloor}{n}$$

definiert.

a) Zeige, dass die f_n σ-endlich sind.

b) Zeige, dass die Funktionenfolge f_n, $n \in \mathbb{N}$, punktweise gegen f konvergiert.

c) Zeige, dass diese Funktionenfolge nicht wachsend sein muss.

d) Sind die f_n messbar?