Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 11

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 11.1. Bestimme explizit den Spaltenrang und den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beschreibe lineare Abhängigkeiten (falls solche existieren) zwischen den Zeilen als auch zwischen den Spalten der Matrix.

Aufgabe 11.2. Zeige, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen der Spaltenrang nicht ändert.

Aufgabe 11.3. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+3i & 5-i \\ 3-2i & 4+i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.4. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.5. Zeige durch Induktion, dass bei einer oberen Dreiecksmatrix die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist.

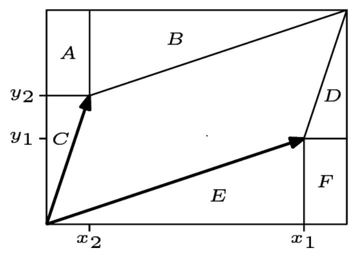
Aufgabe 11.6. Überprüfe die Multilinearität und die Eigenschaft, alternierend zu sein, direkt für die Determinante von 3×3-Matrizen.

Aufgabe 11.7. Es sei M eine quadratische Matrix, die man als

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A und D schreiben kann. Zeige $\det M = \det A \cdot \det D$.

Aufgabe 11.8. Man mache sich anhand des Bildes klar, dass zu zwei Vektoren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Determinante der durch die Vektoren definierten 2×2-Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.



Aufgabe 11.9. Zeige, dass man die Determinante nach jeder Zeile und nach jeder Spalte entwickeln kann.

Aufgabe 11.10. Es sei K ein Körper und $m, n, p \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Transponieren von Matrizen folgende Eigenschaften besitzt (dabei seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $C \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(K)$ und $s \in K$).

(1) $(A^{tr})^{tr} = A$.
(2) $(A + B)^{tr} = A^{tr} + B^{tr}$.
(3) $(sA)^{tr} = s \cdot A^{tr}$.
(4) $(A \circ C)^{tr} = C^{tr} \circ A^{tr}$.

Aufgabe 11.11. Man berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

indem man die Matrix nach allen Spalten und nach allen Zeilen entwickle.

Aufgabe 11.12. Berechne die Determinanten aller 3×3-Matrizen, bei denen in jeder Spalte und in jeder Zeile genau einmal 1 und zweimal 0 steht.

Aufgabe 11.13. Sei $z \in \mathbb{C}$ und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto zw,$$

die zugehörige Multiplikation. Bestimme die Determinante dieser Abbildung, wenn man sie als reell-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffasst.

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu $a \in K$ heißt die lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V,\ v \longmapsto av,$$

die *Streckung* (oder *Homothetie*) zum *Streckungsfaktor a*.

Aufgabe 11.14. Was ist die Determinante einer Streckung?

Aufgabe 11.15. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für zwei Streckungen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum.

Aufgabe 11.16. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.17. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M$$

gilt.

Aufgabe 11.18. (3 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+i & 3-2i & 5 \\ i & 1 & 3-i \\ 2i & -4-i & 2+i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.19. (4 Punkte)
Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.20. (2 Punkte)
Berechne die Determinanten der Elementarmatrizen.

Aufgabe 11.21. (5 Punkte)
Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Abbildungsverzeichnis