

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 2

Nicht vergessen: Heute abend ist Vorkursparty im Grünen Jäger (20:00-22:00).

Übungsaufgaben

AUFGABE 2.1. Skizziere ein Teilerdiagramm (also ein Diagramm, in dem die Teilerbeziehung durch Pfeile ausgedrückt wird) für die Zahlen 25, 30, 36 sowie all ihrer positiven Teiler.

AUFGABE 2.2. Finde die Primfaktorzerlegung von 1728.

AUFGABE 2.3. Finde die kleinste Zahl N der Form $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1$, die keine Primzahl ist, wobei p_1, p_2, \dots, p_r die ersten r Primzahlen sind.

AUFGABE 2.4. Sei $r \in \mathbb{N}$.

a) Finde r aufeinander folgende natürliche Zahlen (also $n, n+1, \dots, n+r-1$), die alle nicht prim sind.

b) Finde unendlich viele solcher primfreien r -„Intervalle“.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 1.7 hilfreich.

AUFGABE 2.5. Es sei a eine natürliche Zahl und es sei

$$a = \sum_{i=0}^{\ell} a_i 10^i$$

die Darstellung von a im Dezimalsystem. Zeige, dass a von 3 genau dann geteilt wird, wenn die *Quersumme* $\sum_{i=0}^{\ell} a_i$ von 3 geteilt wird.

AUFGABE 2.6. Finde eine Darstellung der 1 für die folgenden Zahlenpaare. 5 und 7; 20 und 27; 23 und 157.

AUFGABE 2.7. Es seien a und b natürliche Zahlen, deren Produkt ab von einer natürlichen Zahl n geteilt werde. Die Zahlen n und a seien teilerfremd. Zeige, dass b von n geteilt wird.

AUFGABE 2.8. Seien r und s teilerfremde Zahlen. Zeige, dass jede Lösung (x, y) der Gleichung

$$rx + sy = 0$$

die Gestalt $(x, y) = v(s, -r)$ hat, mit einer eindeutig bestimmten Zahl v .

Die folgende Aufgabe zeigt, dass die eindeutige Primfaktorzerlegung keineswegs selbstverständlich ist.

AUFGABE 2.9. Es sei $M \subseteq \mathbb{N}_+$ diejenige Teilmenge, die aus allen natürlichen Zahlen besteht, die bei Division durch 4 den Rest 1 besitzen, also $M = \{1, 5, 9, 13, 17, \dots\}$. Zeige, dass man 441 innerhalb von M auf zwei verschiedene Arten in Faktoren zerlegen kann, die in M nicht weiter zerlegbar sind.

AUFGABE 2.10. Zeige, dass es außer 3, 5, 7 kein weiteres Zahlentripel der Form $p, p + 2, p + 4$ gibt, in dem alle drei Zahlen Primzahlen sind.

AUFGABE 2.11. Es seien a und n natürliche Zahlen mit $n \geq 2$. Es sei

$$a = \sum_{i=0}^{\ell} a_i n^i$$

die Darstellung von a zur Basis n (also mit $0 \leq a_i < n$). Es sei k ein Teiler von $n - 1$. Dann wird a von k genau dann geteilt, wenn die *Quersumme* $\sum_{i=0}^{\ell} a_i$ von k geteilt wird.

AUFGABE 2.12. Betrachte im 15er System mit den Ziffern $0, 1, \dots, 8, 9, A, B, C, D, E$ die Zahl

$$EA09B4CA.$$

Ist diese Zahl durch 7 teilbar?

AUFGABE 2.13. Alle Flöhe leben auf einem unendlichen Zentimeter-Band. Ein Flohmännchen springt bei jedem Sprung 78 cm und die deutlich kräftigeren Flohweibchen springen mit jedem Sprung 126 cm. Die Flohmännchen Florian, Flöhchen und Carlo sitzen in den Positionen $-123, 55$ und -49 . Die Flohweibchen Flora und Florentina sitzen in Position 17 bzw. 109. Welche Flöhe können sich treffen?

AUFGABE 2.14. Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Zur Karnevalszeit läuft sie aber nicht in Sekundenschritten, sondern addiert, ausgehend von der Nullstellung, in jedem Zähler Schritt immer 11 Stunden, 11 Minuten und 11 Sekunden dazu. Wird bei dieser Zählweise jede mögliche digitale Anzeige erreicht? Nach wie vielen Schritten kehrt zum ersten Mal die Nullstellung zurück?

Aufgabe zum Knobeln

Für die ersten fünf Lösungen (mit Beweis) der folgenden Aufgabe gibt es heute abend im Grünen Jäger ein Freigetränk.

AUFGABE 2.15. Zwei Spieler sitzen an einem runden Tisch und legen abwechselnd eine Münze (alle von der gleichen Größe) auf den Tisch, wobei sich die Münzen nicht überdecken dürfen. Es verliert der Spieler, der keine Münze mehr platzieren kann. Entwerfe eine Gewinnstrategie für den Spieler, der anfängt.