Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Vorlesung 3

Tautologien

Definition 3.1. Ein Ausdruck

$$\alpha \in L^V$$

(zu einer Menge von Aussagevariablen V) heißt *allgemeingültig* (oder eine semantische *Tautologie*,) wenn für jede Wahrheitsbelegung λ die Beziehung

$$I(\alpha) = 1$$

gilt.

Bemerkung 3.2. Den Wert eines Ausdrucks $\alpha \in L^V$ unter einer Belegung λ kann man übersichtlich berechnen, wenn man abhängig von den Variablenwerten (für die in α auftretenden Variablen) sukzessive die Werte der konstituierenden Bestandteile von α berechnet. Um festzustellem, ob eine Tautologie vorliegt, legt man eine *Wahrheitstabelle* an, bei der die Zeilen durch die möglichen Kombinationen an $0,1$-Werten der einzelnen (in α vorkommenden) Variablen gegeben sind. Am übersichtlichsten wird die Tabelle, wenn man sich bei der Zeilenreihenfolge an das Dualsystem hält. Bei n Variablen gibt es (neben der Kopfzeile) 2^n Zeilen.

Beispiel 3.3. Der Ausdruck (genannt *Kontraposition*)

$$\varphi = (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha)$$

ist eine Tautologie. Um dies nachzuweisen, muss man den Wahrheitswert dieses Ausdruckes bei jeder Wahrheitsbelegung berechnen, was wir mit einer Wahrheitstabelle durchführen.

Kontraposition

α	β	$\alpha \to \beta$	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\beta \to \neg\alpha$	$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Dagegen ist der Ausdruck

$$\varphi = \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \to \gamma$$

keine Tautologie, da wir in Beispiel 3.3 eine Wahrheitsbelegung mit dem Gesamtwert 0 angegeben haben.

Definition 3.4. Es sei V eine Menge von Aussagevariablen und L^V die zugehörige aussagenlogische Sprache. Eine Teilmenge $\Gamma \subseteq L^V$ heißt *erfüllbar*, wenn es eine Wahrheitsbelegung λ mit zugehöriger Interpretation I derart gibt, dass $I(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in \Gamma$ gilt.

Diese Sprechweise verwendet man insbesondere für einen einzelnen Ausdruck $\alpha \in \Gamma^V$.

Lemma 3.5. *Ein Ausdruck*

$$\alpha \in L^V$$

(zu einer Menge von Aussagevariablen V) ist genau dann eine (semantische) Tautologie, wenn $\neg\alpha$ nicht erfüllbar ist.

Beweis. Wir beweisen die kontraponierte Aussage, dass α genau dann keine Tautologie ist, wenn $\neg\alpha$ erfüllbar ist. Dass keine Tautologie vorliegt, bedeutet, dass es eine Wahrheitsbelegung λ derart gibt, dass

$$I^\lambda(\alpha) = 0.$$

Dies bedeutet aber

$$I^\lambda(\neg\alpha) = 1,$$

was gerade die Erfüllbarkeit von $\neg\alpha$ besagt. □

Die Folgerungsbeziehung

Definition 3.6. Es sei V eine Menge von Variablen und L^V die zugehörige aussagenlogische Sprache. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Teilmenge und $\alpha \in L^V$. Man sagt, dass α aus Γ *folgt*, geschrieben $\Gamma \vDash \alpha$, wenn für jede Interpretation I (gegeben durch eine Wahrheitsbelegung λ) mit $I \vDash \Gamma$ auch $I \vDash \alpha$ gilt.

Ein Ableitungskalkül für die Aussagenlogik

In den folgenden aussagenlogischen Tautologien sind α und β beliebige Ausdrücke. Um Klammern zu sparen verwenden wir die Konvention, dass die Negation sich auf das folgende Zeichen bezieht und dass die Konjunktion stärker bindet als die Implikation.

Axiom 3.7. Zu einer Aussagevariablenmenge V und beliebige Ausdrücke α, β, γ legt man folgende (syntaktische) *Tautologien* axiomatisch fest.

(1)
$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha\,.$$

(2)
$$\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)\,.$$

(3)
$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)\,.$$

(4)

$$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$$

und

$$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \,.$$

(5)

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma) \,.$$

(6)

$$\vdash (\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$$

und

$$\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma) \,.$$

(7)

$$\vdash \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta \,.$$

(8)

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \,.$$

Man spricht häufig auch genauer von *Axiomenschemata*, da jedes Axiom bei unterschiedlichen Einsetzungen eine Vielzahl von Axiomen representiert. Das Axiom (3) besagt die *Transitivität der Implikation*, Axiom (7) heißt *Widerspruchsaxiom* und Axiom (8) heißt *Fallunterscheidungsaxiom*. Diese Tautologien sind die axiomatisch fixierten Grundtautologien und fungieren als die Startglieder im rekursiven Aufbau der syntaktischen Tautologien. Um überhaupt aus diesen Axiomen weitere Tautologien generieren zu können, braucht man Ableitungsregeln. Davon gibt es lediglich eine.

Modus Ponens

Aus $\vdash \alpha$ und $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ folgt $\vdash \beta$.

Definition 3.8. Unter einer *syntaktischen Tautologie* versteht man einen Ausdruck $\alpha \in L^V$ (zu einer Aussagevariablenmenge V), den man aus den Grundtautologien rekursiv mittels Modus Ponens erhalten kann.

Bemerkung 3.9. Eine Durchsicht der Grundtautologien zeigt, dass es sich jeweils auch um semantische Tautologien handelt. Wenn ferner α und $\alpha \rightarrow \beta$ semantische Tautologien sind, so ist auch β eine semantische Tautologie. D.h. die semantischen Tautologien sind unter Modus Ponens abgeschlossen. Dies bedeutet insgesamt, dass syntaktische Tautologien stets semantische Tautologien sind. Diese Eigenschaft nennt man auch die *Korrektheit* des syntaktischen Kalküls, er leitet ausschließlich semantische Tautologien, also wahre Aussagen ab. Die umgekehrte Aussage, dass sich jede semantische Tautologie auch syntaktisch in dem angegebenen Kalkül ableiten lässt, nennt man die *Vollständigkeit* des Kalküls.

Bemerkung 3.10. Die aussagenlogischen Axiome der Form $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ führen zu entsprechenden Schlussregeln, d.h. Vorschriften, wie man aus (schon etablierten) syntaktischen Tautologien neue Tautologien erhält. Wir gehen unter diesem Gesichtspunkt die Axiome durch.

Aus $\vdash \alpha$ folgt $\vdash \beta \rightarrow \alpha$.

Dies ergibt sich aus der Voraussetzung $\vdash \alpha$ aus $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ und dem Modus ponens.

Aus $\vdash \alpha \wedge \beta$ folgt $\vdash \alpha$ (und ebenso $\vdash \beta$).

Dies ergibt sich aus dem Axiom $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ und der Voraussetzung $\vdash \alpha \wedge \beta$ mittels Modus Ponens. Umgekehrt folgt aus $\vdash \alpha$ und $\vdash \beta$ auch $\vdash \alpha \wedge \beta$. Dies ergibt sich aus

$$\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$$

(was aus den Axiomen folgt, siehe Aufgabe 3.12) aus den Voraussetzungen durch eine zweifache Anwendung des Modus Ponens.

Aus $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ und $\vdash \beta \rightarrow \gamma$ ergibt sich $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$. Diese Regel heißt *Kettenschlussregel*. Nach der obigen abgeleiteten Konjunktionsregel folgt aus den Voraussetzungen direkt $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$ und daraus mit dem Modus Ponens $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$.

LEMMA 3.11. *Es ist*

$$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha \,.$$

Beweis. Nach Axiom 3.11 (5) ist

$$\vdash ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta) \wedge ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha) \,.$$

Die beiden Vordersätze gelten nach Axiom 3.11 (4), so dass auch ihre Konjunktion ableitbar ist. Daher ist auch der Nachsatz ableitbar. □

LEMMA 3.12. (1)

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta) \,.$$

(2)

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta \wedge \delta) \,.$$

Beweis. (1) Nach Axiom 3.11 (3) ist

$$\vdash (\alpha \wedge \gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta)) \,.$$

Der Vordersatz ist nach Axiom 3.11 (4) ableitbar, also auch der Nachsatz.

(2) Nach Teil (1) ist

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta)$$

und

$$\vdash (\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma \rightarrow \delta) \,.$$

Daher gilt auch

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta)$$

und

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma \rightarrow \delta)$$

bzw.
$$\vdash (\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta) \wedge \alpha \wedge \gamma \to \beta$$
und
$$\vdash (\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta) \wedge \alpha \wedge \gamma \to \delta\,.$$
Nach Axiom 3.11 (5) ist mit der Abkürzung $\alpha = (\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta) \wedge \alpha \wedge \gamma$
$$\vdash (\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \delta) \to (\alpha \to \beta \wedge \gamma)\,.$$
Da die beiden Vordersätze ableitbar sind, ist auch der Nachsatz ableitbar, was unter Verwendung von Axiom 3.11 (6) zur Behauptung umformulierbar ist.

□

Die folgende Aussage gibt eine „interne Version“ des Modus Ponens, der ja nach Definition eine Schlussregel ist.

Lemma 3.13. *Es ist*
$$\vdash \alpha \wedge (\alpha \to \beta) \to \beta\,.$$

Beweis. Nach Axiom 3.11 (8) ist
$$\vdash (\alpha \to \beta) \wedge (\neg\alpha \to \beta) \to \beta\,,$$
und Axiom 3.11 (7) kann man wegen Axiom 3.11 (6) zu
$$\vdash \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$$
umformulieren. Daraus ergibt sich mit Lemma 3.14 (2)
$$\vdash \alpha \wedge (\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \beta)$$
und daraus durch den Kettenschluss die Behauptung. □

Lemma 3.14.
(1) *Aus* $\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$ *und* $\vdash \gamma \to \delta$ *folgt* $\vdash \alpha \to (\beta \to \delta)$.
(2) *Aus* $\vdash \alpha$ *und* $\vdash \alpha \wedge \beta \to \gamma$ *ergibt sich* $\vdash \beta \to \gamma$.

Beweis. (1) Sei
$$\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$$
und
$$\vdash \gamma \to \delta\,.$$
Nach Bemerkung 3.10 gilt auch
$$\vdash \alpha \to (\gamma \to \delta)$$
und daraus ergibt sich mit Axiom 3.11 (5), der Konjunktionsregel und dem Modus Ponens
$$\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \delta)\,.$$
Mittels des Kettenschlusses ergibt sich daraus und aus Axiom 3.11 (3) die Behauptung.

(2) Siehe Aufgabe 3.15.

□

Abbildungsverzeichnis