Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Vorlesung 11

Mächtigkeiten

Zwei Kinder, die noch nicht zählen können, sitzen im Sandkasten und wollen wissen, wer von ihnen mehr Buddelsachen dabei hat. Sie lösen das Problem, indem beide gleichzeitig je eine Sache aus ihrem Besitz aus dem Sandkasten hinauswerfen, und dies so lange wiederholen, bis ein Kind keine Sachen mehr im Sandkasten hat. Wenn das andere Kind noch Sachen übrig hat, so hat dieses insgesamt mehr Buddelsachen, anderfalls haben sie gleichviel. Dies ist die Grundidee für den Begriff der gleichmächtigen Menge.

Definition 11.1. Zwei Mengen L und M heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\varphi\colon\ L \longrightarrow M$$

gibt.

Lemma 11.2. *Es seien M und N zwei Mengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *N ist leer oder es gibt eine surjektive Abbildung*
$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N.$$
(2) *Es gibt eine injektive Abbildung*
$$\psi\colon\ N \longrightarrow M.$$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Wenn N leer ist, so kann man die leere Abbildung $\emptyset \to M$ nehmen. Sei also $N \neq \emptyset$ und sei

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

surjektiv. Zu jedem $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $\varphi(x) = y$. Wir wählen für jedes y ein solches x_y aus und definieren ψ durch

$$\psi\colon\ N \longrightarrow M,\ y \longmapsto \psi(y) = x_y.$$

Wegen $\varphi(\psi(y)) = y$ ist ψ injektiv.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sei nun eine injektive Abbildung

$$\psi\colon\ N \longrightarrow M$$

gegeben. Diese induziert eine Bijektion zwischen N und dem Bild von ψ, sei $\theta\colon\ N \to \operatorname{bild}\psi$ diese Abbildung. Wenn N leer ist, so sind wir fertig. Sei also $N \neq \emptyset$ und sei $c \in N$ ein fixiertes Element. Wir definieren

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \theta^{-1}(x), & \text{falls } x \in \operatorname{bild} \psi\,, \\ c \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wegen $\varphi(\theta(y)) = y$ surjektiv. □

Endliche Mengen

DEFINITION 11.3. Eine Menge M heißt *endlich* mit m Elementen, wenn es eine Bijektion

$$\{1, \ldots, m\} \longrightarrow M$$

gibt.

Die natürliche Zahl m ist dabei nach Aufgabe 2.5 eindeutig bestimmt und heißt die *Anzahl* (oder die *Kardinalität*) der Menge. Sie wird mit $\#(M)$ oder mit $|M|$ bezeichnet. Die bijektive Abbildung

$$\{1, \ldots, m\} \longrightarrow M$$

kann man eine *Nummerierung* der Menge M nennen. Eine Menge besitzt also n Elemente, wenn man sie mit den natürlichen Zahlen von 1 bis n durchnummerieren kann. Zwei endliche Mengen M und N, für die es eine Bijektion

$$M \longrightarrow N$$

gibt, besitzen die gleiche Anzahl. Dies beruht einfach darauf, dass diese Bijektion verknüpft mit der bijektiven Nummerierung wieder eine Bijektion ist. Eine Menge, die nicht endlich ist, für die es also keine Bijektion mit $\{1, \ldots, n\}$ für kein n gibt, heißt *unendlich*.

LEMMA 11.4. *Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und N eine endliche Menge mit n Elementen. Es sei $m > n$. Dann gibt es keine injektive Abbildung*

$$M \longrightarrow N.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass es eine injektive Abbildung

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

gibt. Es sei $T = \varphi(M) \subseteq N$ das Bild von M unter der Abbildung φ. Dann ergibt sich eine Bijektion

$$\tilde{\varphi}\colon\ M \longrightarrow T,$$

da sich die Injektivität überträgt und da eine Abbildung immer surjektiv auf ihr Bild ist. Daher haben M und T gleich viele Elemente. Nach Aufgabe 11.1 ist die Anzahl einer Teilmenge stets kleiner oder gleich der Anzahl der Menge. Also ist $m \leq n$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Die vorstehende Aussage heißt *Schubfachprinzip* (oder *Taubenschlagprinzip*). Es besagt, dass wenn man m Tauben auf n Plätze verteilt mit $m > n$, dass dann in mindestens einem Platz mindestens zwei Tauben landen.

Lemma 11.5. *Seien M und N endliche Mengen mit n Elementen. Dann sind für eine Abbildung*

$$F \colon M \longrightarrow N$$

die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv äquivalent.

Beweis. Siehe Aufgabe 11.3. □

Abzählbare Mengen

Durch den Mächtigkeitsbegriff wird eine Hierarchie auch in die Welt der unendlichen Mengen gebracht. Die zu den natürlichen Zahlen gleichmächtigen Mengen sind die „kleinsten" unendlichen Mengen. Dies sind die sogenannten „abzählbar unendlichen" Mengen.

Definition 11.6. Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn sie leer ist oder wenn es eine surjektive Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{N} \longrightarrow M$$

gibt.

Nicht abzählbare Mengen nennt man im Allgemeinen *überabzählbar*. Aufgrund von Lemma 11.2 ist die Abzählbarkeit von M gleichbedeutend damit, dass es eine injektive Abbildung $M \to \mathbb{N}$ gibt. Beim Nachweis der Abzählbarkeit arbeitet man aber meistens mit der oben angegebenen Definition.

Endliche Mengen sind natürlich abzählbar. Die natürlichen Zahlen sind abzählbar unendlich.

Definition 11.7. Eine Menge M heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie abzählbar, aber nicht endlich ist.

Lemma 11.8. *Eine Menge M ist genau dann abzählbar unendlich, wenn es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und M gibt.*

Beweis. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung. Wir definieren induktiv eine streng wachsende Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass $\varphi \circ \psi$ bijektiv ist. Wir setzen $\psi(0) = 0$ und konstruieren ψ induktiv über die Eigenschaft, dass $\psi(n+1)$ die kleinste natürliche Zahl k ist, für die $\varphi(k)$ nicht zu

$$\{\varphi(\psi(0)), \varphi(\psi(1)), \ldots, \varphi(\psi(n))\}$$

gehört. Eine solche Zahl gibt es immer, da andernfalls M endlich wäre; also gibt es auch eine kleinste solche Zahl. Nach Konstruktion ist $\psi(n+1) > \psi(n)$, d.h. ψ ist streng wachsend. Da jedes $n \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft

$$\varphi(\psi(n+1)) \notin \{\varphi(\psi(0)), \varphi(\psi(1)), \ldots, \varphi(\psi(n))\}$$

erfüllt, ist die Gesamtabbildung $\varphi \circ \psi$ injektiv. Zum Nachweis der Surjektivität sei $m \in M$. Wegen der Surjektivität von φ ist die Faser (also die Urbildmenge zu diesem Element) $\varphi^{-1}(m)$ nicht leer und daher gibt es auch ein kleinstes Element $a \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(a) = m$. Da ψ streng wachsend ist, gibt es nur endlich viele Zahlen $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mit $\psi(i) < a$. Daher ist $\psi(n+1) = a$ und $\varphi(\psi(n+1)) = \varphi(a) = m$. □

D.h. insbesondere, dass alle abzählbar unendlichen Mengen gleichmächtig sind.

Lemma 11.9. *Seien M_1 und M_2 abzählbare Mengen. Dann ist auch die Produktmenge $M_1 \times M_2$ abzählbar. Insbesondere ist das Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar.*

Beweis. Wir beweisen zuerst den Zusatz. Die Abbildung

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (k, \ell) \longmapsto 2^k(2\ell + 1),$$

ist injektiv, da für jede positive natürliche Zahl n die Zweierpotenz 2^k, die sie teilt, und der ungerade komplementäre Teiler eindeutig bestimmt sind (das Bild der Abbildung ist $\mathbb{N}_+$). Daher ist die Produktmenge nach Lemma 11.2 abzählbar. Für den allgemeinen Fall seien abzählbare Mengen M_1 und M_2 gegeben. Wenn eine davon leer ist, so ist auch die Produktmenge leer und somit abzählbar. Seien also M_1 und M_2 nicht leer und seien $\varphi_1 : \mathbb{N} \to M_1$ und $\varphi_2 : \mathbb{N} \to M_2$ zwei surjektive Abbildungen. Dann ist auch die Produktabbildung

$$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow M_1 \times M_2$$

surjektiv. Nach der Vorüberlegung gibt es eine surjektive Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

so dass es insgesamt eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to M_1 \times M_2$ gibt. $\square$

Lemma 11.10. *Es sei I eine abzählbare Indexmenge und zu jedem $i \in I$ sei M_i eine abzählbare Menge. Dann ist auch die (disjunkte) Vereinigung*[1] *$\bigcup_{i \in I} M_i$ abzählbar.*

Beweis. Wir können annehmen, dass sämtliche M_i nicht leer sind. Es gibt dann surjektive Abbildungen

$$\varphi_i \colon \mathbb{N} \longrightarrow M_i .$$

Daraus konstruieren wir die Abbildung

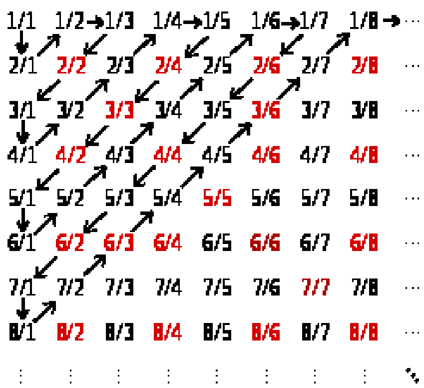
$$\varphi \colon I \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{i \in I} M_i,\ (i,n) \longmapsto \varphi_i(n),$$

die offensichtlich surjektiv ist. Nach Lemma 11.9 ist die Produktmenge $I \times \mathbb{N}$ abzählbar, also gilt das auch für das Bild unter φ, und dieses ist die Vereinigung. $\square$

Wir ziehen einige wichtige Konsequenzen über die Abzählbarkeit von Zahlbereichen. Man beachte, dass die natürlichen Inklusionen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ nicht bijektiv sind. Die Bijektionen, die es zwischen $\mathbb{N}$ einerseits und $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$ andererseits aufgrund der folgenden Aussagen gibt, respektieren nicht die Rechenoperationen.

Lemma 11.11. *Die Menge der ganzen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.4. $\square$



Die Abzählbarkeit der positiven rationalen Zahlen.

Satz 11.12. *Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

[1]Wenn die M_i Teilmengen einer festen Obermenge sind, so ist die Vereinigung in dieser Menge zu nehmen und im Allgemeinen nicht disjunkt. Wenn es sich um Mengen handelt, die nichts miteinander zu tum haben, so ist mit Vereinigung die disjunkte Vereinigung gemeint.

Beweis. Siehe Aufgabe 11.5. □

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Satz 11.13. *Die Menge der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis. Nehmen wir an, die Menge der reellen Zahlen sei abzählbar, dann ist insbesondere auch das Einheitsintervall $[0,1[$ abzählbar. Sei also

$$\psi\colon\ \mathbb{N}_+ \longrightarrow [0,1[$$

eine surjektive Abbildung. Wir betrachten die reellen Zahlen als Ziffernfolgen im Dreiersystem: Jede reelle Zahl $r \in [0,1[$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung als Reihe

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(r) 3^{-k}\,,$$

wobei die k-te Nachkommaziffer $z_k(r) \in \{0,1,2\}$ ist und wobei nicht fast alle (das bedeutet alle bis auf endlich viele) Ziffern gleich 2 sind (sonst hätte man keine Eindeutigkeit). Wir definieren nun eine reelle Zahl durch $s = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 3^{-k}$ mit

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } (\psi(k))_k = 1 \text{ oder } 2 \\ 1, & \text{falls } (\psi(k))_k = 0\,. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Zahl s nicht in der Aufzählung ψ vorkommt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist nämlich $\psi(k) \neq s$, da $\psi(k)$ sich nach Konstruktion von s an der k-ten Nachkommastelle unterscheidet. Also ist ψ doch nicht surjektiv. □

Bemerkung 11.14. Ist jede überabzählbare Menge $T \subseteq \mathbb{R}$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$? Die *Kontinuumshypothese* behauptet, dass dies gilt. Diese Frage berührt die mengentheoretischen Grundlagen der Mathematik; es hängt nämlich von der gewählten Mengenlehre ab, ob dies gilt oder nicht, man kann es sich also aussuchen. Anders als beim *Auswahlaxiom*, ohne dessen Akzeptanz eine Vielzahl von mathematischen Schlüssen nicht möglich wäre und die Mathematik ziemlich anders aussehen wüde, ist es für praktische Zwecke unerheblich, wofür man sich entscheidet.

Mit einem ähnlichen (Diagonal)-Argument wie im Beweis zu Satz 11.13 kann man zeigen, dass die Potenzmenge einer Menge stets eine größere Mächtigkeit als die Menge besitzt.

Kurt Gödel bewies 1938, dass die Hinzunahme der Kontinuumshypothese zur Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre einschließlich Auswahlaxiom (ZFC) diese nicht widersprüchlich macht. Man kann aber nicht beweisen, dass ZFC widerspruchsfrei ist. Auch das hat Gödel bewiesen.

SATZ 11.15. *Es sei M eine Menge und $\mathfrak{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Dann besitzt $\mathfrak{P}(M)$ eine größere Mächtigkeit als M.*

Beweis. Wir nehmen an, dass es eine surjektive Abbildung

$$F\colon M \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\, x \longmapsto F(x),$$

gibt, und müssen dies zu einem Widerspruch führen. Dazu betrachten wir

$$T = \{x \in M \,|\, x \notin F(x)\} .$$

Da dies eine Teilmenge von M ist, muss es wegen der Surjektivität ein $y \in M$ geben mit

$$F(y) = T .$$

Es gibt nun zwei Fälle, nämlich $y \in F(y)$ oder $y \notin F(y)$. Im ersten Fall ist also $y \in T$, und damit, nach der Definition von T, auch $y \notin F(y)$, Widerspruch. Im zweiten Fall ist, wieder aufgrund der Definition von T, $y \in T$, und das ist ebenfalls ein Widerspruch. $\square$

Häufungspunkte

DEFINITION 11.16. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder x_n mit $|x_n - x| \leq \epsilon$ gibt.

Abbildungsverzeichnis