Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 18

Stetige Funktionen

Den Abstand zwischen zwei reellen Zahlen x und x' bezeichnen wir mit $d(x,x') = |x - x'|$.

Bei einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

kann man sich fragen, inwiefern der Abstand in der Wertemenge durch den Abstand in der Definitionsmenge kontrollierbar ist. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $y = f(x)$ der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte x', die „nahe“ an x sind, auch die Bildpunkte $f(x')$ nahe an $f(x)$ sind. Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dieses ϵ repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit“. Die Frage ist dann, ob man ein $\delta > 0$ finden kann (eine „Startgenauigkeit“) mit der Eigenschaft, dass für alle x' mit $d(x,x') \leq \delta$ die Beziehung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung.

Definition 18.1. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge,

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $x \in D$. Man sagt, dass f *stetig* im Punkt x ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für alle x' mit $d(x,x') \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ folgt. Man sagt, dass f *stetig* ist, wenn sie in jedem Punkt $x \in D$ stetig ist.

Bei D sollte man an den Definitionsbereich der Funktion denken. Typische Situationen sind, dass D ganz $\mathbb{R}$ ist, oder ein Intervall, oder $\mathbb{R}$ ohne endlich viele Punkte und Ähnliches. Statt mit den reellen Zahlen ϵ und δ kann man genauso gut mit Stammbrüchen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ arbeiten.

Beispiel 18.2. Eine konstante Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto c,$$

ist stetig. Zu jedem vorgegeben ϵ kann man hier ein beliebiges δ wählen, da ja ohnehin

$$d(f(x), f(x')) = d(c,c) = 0 \leq \epsilon$$

gilt.

Die Identität

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x,$$

ist ebenfalls stetig. Zu jedem vorgegeben ϵ und kann man hier $\delta = \epsilon$ wählen, was zu der Tautologie führt: wenn $d(x, x') \leq \delta = \epsilon$, so ist

$$d(f(x), f(x')) \;=\; d(x, x') \;\leq\; \epsilon.$$

Beispiel 18.3. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ falls } x < 0\,, \\ 1 \text{ falls } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Nullpunkt 0 nicht stetig. Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ und jedes beliebige positive δ gibt es nämlich negative Zahlen x' mit $d(0, x') \;=\; |x'| \;\leq\; \delta$. Für diese ist aber $d(f(0), f(x')) \;=\; d(1, 0) \;=\; 1 \;\not\leq\; \frac{1}{2}$.

Lemma 18.4. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge,*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $x \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist stetig im Punkt x.*
(2) *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*

Beweis. Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (1) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta\,.$$

Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\,,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert. Sei (2) erfüllt und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir nehmen an, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in D$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein $x_n \in D$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon\,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenwerte zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2). $\square$

Lemma 18.5. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn f in $x \in D$ und g in $f(x)$ stetig sind, so ist auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ in x stetig.*
(2) *Wenn f und g stetig sind, so ist auch $g \circ f$ stetig.*

Beweis. Die Aussage (1) ergibt sich direkt aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit. Daraus folgt auch (2). □

Lemma 18.6. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien*

$$f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) - g(x),$$

$$f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq D$, auf der g keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion

$$f/g : U \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

Beweis. Dies ergibt sich aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit und Fakt *****. □

Korollar 18.7. *Polynomfunktionen*

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto P(x),$$

sind stetig.

Beweis. Aufgrund von Fakt ***** sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

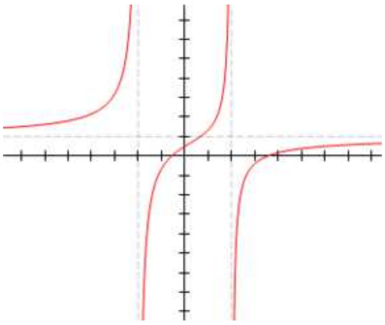
stetig. Daher sind auch für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto ax^n,$$

stetig und wiederum aufgrund von Fakt ***** sind auch alle Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

stetig. □



Rationale Funktionen sind auf ihrer Definitionsmenge stetig.

Korollar 18.8. *Es seien* $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ *zwei Polynome und es sei* $U = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. *Dann ist die rationale Funktion*

$$U \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)},$$

stetig.

Beweis. Dies folgt aus Fakt ***** und Fakt *****. □

Abbildungsverzeichnis