

Analysis I

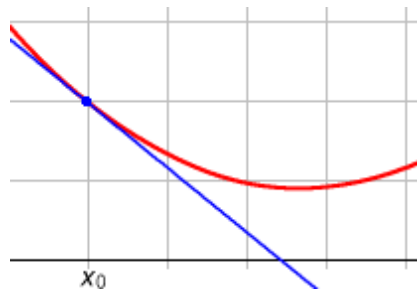
Vorlesung 18

Differenzierbare Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei $D \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Menge in \mathbb{K} ist.



DEFINITION 18.1. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Zu $x \in D$, $x \neq a$, heißt die Zahl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von f zu a und x .

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante am Graph durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Für $x = a$ ist dieser Quotient *nicht* definiert. Allerdings kann ein sinnvoller Limes für $x \rightarrow a$ existieren. Dieser repräsentiert dann die Steigung der *Tangente*.

DEFINITION 18.2. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* in a ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\}, x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Im Fall der Existenz heißt dieser Limes der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von f in a , geschrieben

$$f'(a).$$

Die Ableitung in einem Punkt a ist, falls sie existiert, ein Element in \mathbb{K} . Häufig nimmt man die Differenz $h = x - a$ als Parameter für den Limes des Differenzenquotienten, und lässt h gegen 0 gehen, d.h. man betrachtet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Die Bedingung $x \in D \setminus \{a\}$ wird dann zu $a+h \in D$, $h \neq 0$.

BEISPIEL 18.3. Es seien $s, c \in \mathbb{K}$ und sei

$$\alpha: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, z \longmapsto sz + c,$$

eine sogenannte affin-lineare Funktion. Zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$ betrachtet man

$$\frac{(sx+c) - (sa+c)}{x-a} = \frac{s(x-a)}{x-a} = s.$$

Dies ist konstant gleich s , so dass der Limes für x gegen a existiert und gleich s ist. Die Ableitung in jedem Punkt existiert demnach und ist gleich s . Die *Steigung* der affin-linearen Funktion ist also die Ableitung.

BEISPIEL 18.4. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, z \longmapsto z^2.$$

Der Differenzenquotient zu a und $a+h$ ist

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a+h.$$

Der Limes davon für h gegen 0 ist $2a$. Die Ableitung ist daher $f'(a) = 2a$.

SATZ 18.5. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann ist f in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{K}$ und eine Funktion

$$r: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a).$$

Beweis. Wenn f differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion r muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s & \text{für } x \neq a, \\ 0 & \text{für } x = a, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in D \setminus \{a\}} r(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in D \setminus \{a\}} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - s \right),$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass r in a stetig ist. Wenn umgekehrt s und r mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = s + r(x).$$

Da r stetig in a ist, muss auch der Limes links für $x \rightarrow a$ existieren. \square

Die in diesem Satz formulierte Eigenschaft, die zur Differenzierbarkeit äquivalent ist, nennt man auch die *lineare Approximierbarkeit*. Die affin-lineare Abbildung

$$D \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(a) + f'(a)(x - a),$$

heißt dabei die *affin-lineare Approximation*. Die durch $f(a)$ gegebene konstante Funktion kann man als konstante Approximation ansehen.

KOROLLAR 18.6. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion, die im Punkt a differenzierbar sei. Dann ist f stetig in a .

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 18.5. \square

LEMMA 18.7. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f, g: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei Funktionen, die in a differenzierbar seien. Dann gelten folgende Differenzierbarkeitsregeln.

(1) Die Summe $f + g$ ist differenzierbar in a mit

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(2) Das Produkt $f \cdot g$ ist differenzierbar in a mit

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(3) Für $c \in \mathbb{K}$ ist auch cf in a differenzierbar mit

$$(cf)'(a) = cf'(a).$$

(4) Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist $1/g$ differenzierbar in a mit

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}.$$

(5) Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist f/g differenzierbar in a mit

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Beweis. (1). Wir schreiben f bzw. g mit den in Satz 18.5 formulierten Objekten, also

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a).$$

Summieren ergibt

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (s + \tilde{s})(x-a) + (r + \tilde{r})(x)(x-a).$$

Dabei ist die Summe $r + \tilde{r}$ wieder stetig in a mit dem Wert 0. (2). Wir gehen wieder von

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)$$

aus und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &\quad (g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)) \\ &= f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x-a) \\ &\quad + (f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x-a) \\ &\quad + s\tilde{r}(x)(x-a) + \tilde{s}r(x)(x-a) + r(x)\tilde{r}(x)(x-a))(x-a). \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 12.10 für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0 für $x = a$. (3) folgt aus (2), da eine konstante Funktion differenzierbar ist mit Ableitung 0. (4). Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$

Da g nach Korollar 18.6 stetig in a ist, konvergiert für $x \rightarrow a$ der linke Faktor gegen $-\frac{1}{g(a)^2}$ und wegen der Differenzierbarkeit von g in a konvergiert der rechte Faktor gegen $g'(a)$. (5) folgt aus (2) und (4). \square

SATZ 18.8. Seien

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g: E \longrightarrow \mathbb{K}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Es sei f in a differenzierbar und g sei in $b = f(a)$ differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

in a differenzierbar mit der Ableitung

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Beweis. Aufgrund von Satz 18.5 kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x)(x - a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

schreiben. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x - a) + r(x)(x - a)) \\ &\quad + s(f(x))(f'(a)(x - a) + r(x)(x - a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x - a) + (g'(f(a))r(x) \\ &\quad + s(f(x))(f'(a) + r(x)))(x - a). \end{aligned}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) := g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in a mit dem Wert 0. □

SATZ 18.9. Seien D und E zwei offene Mengen in \mathbb{K} und sei

$$f: D \longrightarrow E$$

eine bijektive stetige Funktion mit einer stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1}: E \longrightarrow D$$

Es sei f in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} in $b = f(a)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotient

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für $y \rightarrow b$ existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $E \setminus \{b\}$, die gegen b konvergiert. Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von f^{-1} konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen a . Wegen der Bijektivität ist $x_n \neq a$ für alle n . Damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert. □

BEISPIEL 18.10. Die Funktion

$$f^{-1}: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto \sqrt{x},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$ (eingeschränkt auf \mathbb{R}_+). Deren Ableitung in einem Punkt a ist $f'(a) = 2a$. Nach Satz 18.9 gilt daher für $b \in \mathbb{R}_+$ die Beziehung

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Funktion

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^{\frac{1}{3}},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^3$. Deren Ableitung in a ist $f'(a) = 3a^2$, dies ist für $a \neq 0$ von 0 verschieden. Nach Satz 18.9 ist für $b \neq 0$ somit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{3(b^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3}b^{-\frac{2}{3}}.$$

Im Nullpunkt ist f^{-1} nicht differenzierbar.

Höhere Ableitungen

DEFINITION 18.11. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f: D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* ist, wenn für jeden Punkt $a \in D$ die Ableitung $f'(a)$ von f in a existiert. Die Abbildung

$$f': D \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f'(x),$$

heißt die *Ableitung* (oder *Ableitungsfunktion*) von f .

DEFINITION 18.12. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f: U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f n -mal *differenzierbar* ist, wenn f $(n-1)$ -mal differenzierbar ist und die $(n-1)$ -te Ableitung $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f^{(n)}(z) := (f^{(n-1)})'(z)$$

nennt man dann die n -te *Ableitung* von f .

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Tangente2.gif , Autor = Benutzer Loveless auf Commons,
Lizenz = CC-by-sa 3.0

1