Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

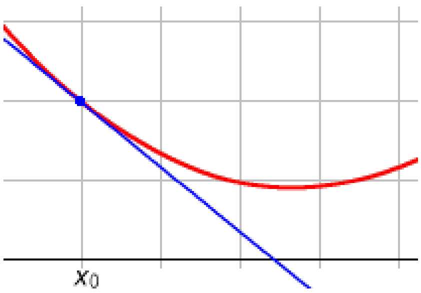
Vorlesung 18

Differenzierbare Funktionen

In dieser Vorlesung betrachten wir Funktionen

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei $D \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Menge in $\mathbb{K}$ ist. Das ist eine Menge derart, dass es zu jedem $a \in D$ auch eine offene Umgebung $U(a, r)$, $r > 0$, gibt, die ganz in D liegt. Typische Beispiele sind $D = \mathbb{K}$, $U(a, r)$, $\mathbb{K} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.



Definition 18.1. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Zu $x \in D$, $x \neq a$, heißt die Zahl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von f zu a und x.

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante am Graph durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Für $x = a$ ist dieser Quotient *nicht* definiert. Allerdings kann ein sinnvoller Limes für $x \to a$ existieren. Dieser repräsentiert dann die Steigung der *Tangente*.

Definition 18.2. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* in a ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Im Fall der Existenz heißt dieser Limes der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von f in a, geschrieben

$$f'(a)\,.$$

Die Ableitung in einem Punkt a ist, falls sie existiert, ein Element in $\mathbb{K}$. Häufig nimmt man die Differenz $h = x - a$ als Parameter für den Limes des Differenzenquotienten, und lässt h gegen 0 gehen, d.h. man betrachtet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$

Die Bedingung $x \in D \setminus \{a\}$ wird dann zu $a + h \in D$, $h \neq 0$.

Beispiel 18.3. Es seien $s, c \in \mathbb{K}$ und sei

$$\alpha\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ z \longmapsto sz + c,$$

eine sogenannte affin-lineare Funktion. Zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$ betrachtet man

$$\frac{(sx + c) - (sa + c)}{x - a} = \frac{s(x - a)}{x - a} = s\,.$$

Dies ist konstant gleich s, so dass der Limes für x gegen a existiert und gleich s ist. Die Ableitung in jedem Punkt existiert demnach und ist gleich s. Die *Steigung* der affin-linearen Funktion ist also die Ableitung.

Beispiel 18.4. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ z \longmapsto z^2.$$

Der Differenzenquotient zu a und $a + h$ ist

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a+h.$$

Der Limes davon für h gegen 0 ist $2a$. Die Ableitung ist daher $f'(a) = 2a$.

Lineare Approximierbarkeit

Satz 18.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann ist f in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{K}$ und eine Funktion

$$r\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s(x - a) + r(x)(x - a)\,.$$

Beweis. Wenn f differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion r muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \text{ für } x \neq a\,, \\ 0 \text{ für } x = a\,, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x \to a,\, x \in D \setminus \{a\}} r(x) \;=\; \lim_{x \to a,\, x \in D \setminus \{a\}} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \right),$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass r in a stetig ist. Wenn umgekehrt s und r mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = s + r(x)\,.$$

Da r stetig in a ist, muss auch der Limes links für $x \to a$ existieren. □

Die in diesem Satz formulierte Eigenschaft, die zur Differenzierbarkeit äquivalent ist, nennt man auch die *lineare Approximierbarkeit*. Die affin-lineare Abbildung

$$D \longrightarrow \mathbb{K},\; x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a),$$

heißt dabei die *affin-lineare Approximation*. Ihr Graph heißt die *Tangente* an f im Punkt a. Die durch $f(a)$ gegebene konstante Funktion kann man als konstante Approximation ansehen.

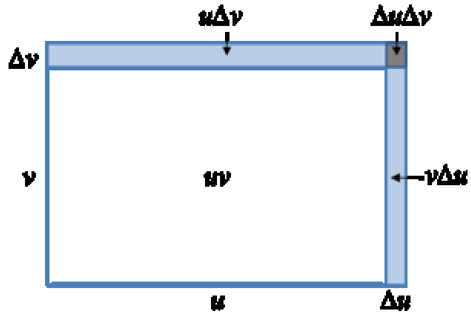
KOROLLAR 18.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f\colon\, D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion, die im Punkt a differenzierbar sei. Dann ist f stetig in a.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 18.5. □

Ableitungsregeln



Eine Veranschaulichung der Produktregel: Der Zuwachs eines Flächeninhalts entspricht der Summe der beiden Produkte aus Seitenlänge und Seitenlängezuwachs. Für den infinitesimalen Zuwachs ist das Produkt der beiden Seitenlängenzuwächse irrelevant.

LEMMA 18.7. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f, g \colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei Funktionen, die in a differenzierbar seien. Dann gelten folgende Differenzierbarkeitsregeln.

(1) *Die Summe $f + g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,.$$
(2) *Das Produkt $f \cdot g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$
(3) *Für $c \in \mathbb{K}$ ist auch cf in a differenzierbar mit*
$$(cf)'(a) = cf'(a)\,.$$
(4) *Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist $1/g$ differenzierbar in a mit*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$
(5) *Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist f/g differenzierbar in a mit*
$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

Beweis. (1). Wir schreiben f bzw. g mit den in Satz 18.5 formulierten Objekten, also

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)\,.$$

Summieren ergibt

$$f(x)+g(x)=f(a)+g(a)+(s+\tilde{s})(x-a)+(r+\tilde{r})(x)(x-a)\,.$$

Dabei ist die Summe $r+\tilde{r}$ wieder stetig in a mit dem Wert 0. (2). Wir gehen wieder von

$$f(x)=f(a)+s(x-a)+r(x)(x-a)$$

und

$$g(x)=g(a)+\tilde{s}(x-a)+\tilde{r}(x)(x-a)$$

aus und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(a)+s(x-a)+r(x)(x-a)) \\ &\quad (g(a)+\tilde{s}(x-a)+\tilde{r}(x)(x-a)) \\ &= f(a)g(a)+(sg(a)+\tilde{s}f(a))(x-a) \\ &\quad +(f(a)\tilde{r}(x)+g(a)r(x)+s\tilde{s}(x-a) \\ &\quad +s\tilde{r}(x)(x-a)+\tilde{s}r(x)(x-a)+r(x)\tilde{r}(x)(x-a))(x-a). \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 12.10 für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0 für $x=a$. (3) folgt aus (2), da eine konstante Funktion differenzierbar ist mit Ableitung 0. (4). Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a}=\frac{-1}{g(a)g(x)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,.$$

Da g nach Korollar 18.6 stetig in a ist, konvergiert für $x\rightarrow a$ der linke Faktor gegen $-\frac{1}{g(a)^2}$ und wegen der Differenzierbarkeit von g in a konvergiert der rechte Faktor gegen $g'(a)$. (5) folgt aus (2) und (4). □

Korollar 18.8. *Eine Polynomfunktion*

$$f=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots+c_{n-1}z^{n-1}+c_nz^n$$

ist in jedem Punkt differenzierbar, und für die Ableitung gilt

$$f'(z)=c_1+2c_2z+3c_3z^2+\cdots+(n-1)c_{n-1}z^{n-2}+nc_nz^{n-1}\,.$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 18.7. □

Satz 18.9. *Seien D und E offene Mengen in $\mathbb{K}$ und seien*

$$f\colon D\longrightarrow\mathbb{K}$$

und

$$g\colon E\longrightarrow\mathbb{K}$$

Funktionen mit $f(D)\subseteq E$. Es sei f in a differenzierbar und g sei in $b=f(a)$ differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g\circ f\colon D\longrightarrow\mathbb{K}$$

in a differenzierbar mit der Ableitung

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a)\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 18.5 kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

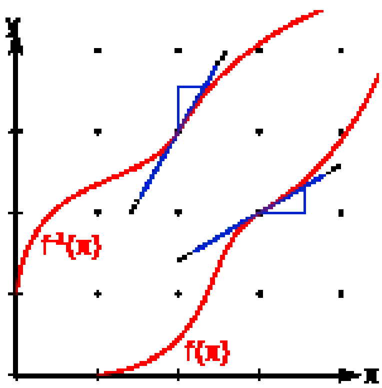
schreiben. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))\left(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)\right) \\ &\quad + s(f(x))\left(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)\right) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) \\ &\quad + \left(g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))\right)(x-a). \end{aligned}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) := g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in a mit dem Wert 0. □



Eine Veranschaulichung für die Ableitung der Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion besitzt den an der Hauptdiagonalen gespiegelten Graphen und die Tangente wird mitgespiegelt.

Satz 18.10. *Seien D und E offene Mengen in $\mathbb{K}$ und sei*

$$f\colon D \longrightarrow E$$

eine bijektive stetige Funktion mit einer stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon E \longrightarrow D$$

Es sei f in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} in $b = f(a)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y-b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für $y \to b$ existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $E\setminus\{b\}$, die gegen b konvergiert. Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von f^{-1} konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen a. Wegen der Bijektivität ist $x_n \neq a$ für alle n. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert. $\square$

Beispiel 18.11. Die Funktion

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$ (eingeschränkt auf $\mathbb{R}_+$). Deren Ableitung in einem Punkt a ist $f'(a) = 2a$. Nach Satz 18.10 gilt daher für $b \in \mathbb{R}_+$ die Beziehung

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2} b^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Funktion

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{\frac{1}{3}},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^3$ Deren Ableitung in a ist $f'(a) = 3a^2$, dies ist für $a \neq 0$ von 0 verschieden. Nach Satz 18.10 ist für $b \neq 0$ somit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{3(b^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3} b^{-\frac{2}{3}}.$$

Im Nullpunkt ist f^{-1} nicht differenzierbar.

Höhere Ableitungen

Definition 18.12. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* ist, wenn für jeden Punkt $a \in D$ die Ableitung $f'(a)$ von f in a existiert. Die Abbildung

$$f'\colon D \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f'(x),$$

heißt die *Ableitung* (oder *Ableitungsfunktion*) von f.

Definition 18.13. Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f n-mal *differenzierbar* ist, wenn f $(n-1)$-mal differenzierbar ist und die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f^{(n)}(z) := (f^{(n-1)})'(z)$$

nennt man dann die n-te *Ableitung* von f.

Definition 18.14. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *n-mal stetig differenzierbar* ist, wenn f n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung $f^{(n)}$ stetig ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Tangente2.gif , Autor = Benutzer Loveless auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 1

Quelle = Schema Règle produit.png , Autor = Benutzer ThibautLienart auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 4

Quelle = FunktionUmkehrTangente.svg , Autor = Jonathan Steinbuch, Lizenz = CC-by-sa 3.0 6