Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender I

Beispielklausur I mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	4	3	4	3	8	3	4	6	5	3	5	3	5	64
erhalt. Pkt.:																

Note:

AUFGABE 1.1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Die *komplexe Konjugation.*
(2) Die *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.
(3) Eine *lineare* Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
(5) Die *Exponentialreihe* für $x \in \mathbb{R}$.
(6) Die *Stetigkeit* einer Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(7) Eine *Treppenfunktion* auf einem Intervall $[a, b]$.
(8) Eine *Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Lösung

(1) Die Abbildung
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z = a + bi \longmapsto \overline{z} = a - bi,$$
heißt *komplexe Konjugation.*
(2) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung
$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$
nur bei $a_i = 0$ für alle i möglich ist.
(3) Eine Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.
  (a) $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
  (b) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.
(4) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.
Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung
$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$
gilt.

(5) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
die *Exponentialreihe* in x.

(6) Eine Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
heißt stetig, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}$ und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass
$$\varphi\big(]x-\delta, x+\delta[\big) \subseteq]\varphi(x)-\epsilon, \varphi(x)+\epsilon[$$
gilt.

(7) Eine Funktion
$$t : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
heißt eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung
$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$
von $[a,b]$ gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

(8) Eine Differentialgleichung der Form
$$y' = g(t) \cdot h(y)$$
mit zwei Funktionen (dabei sind I und J reelle Intervalle)
$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$
und
$$h : J \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y),$$
heißt *gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Aufgabe 1.2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *Dimensionsformel* für lineare Abbildungen.
(2) Das *Quetschkriterium* für reelle Folgen.
(3) Der *Zwischenwertsatz* für stetige Funktionen.
(4) Der *Mittelwertsatz* der Differentialrechnung.

Lösung

(1) Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann gilt
$$\dim(V) = \dim(\text{kern } \varphi) + \dim(\text{bild } \varphi)\,.$$

(2) Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.

(3) Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.

(4) Sei $a < b$ und sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \,.$$

Aufgabe 1.3. Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Lösung

Für $n = 0$ ist

$$6^2 + 7 \;=\; 43$$

ein Vielfaches von 43. Sei nun die Aussage für n bewiesen und betrachten wir den Ausdruck für $n + 1$. Dieser ist

$$\begin{aligned} 6^{n+1+2} + 7^{2(n+1)+1} &= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 6^{n+2} + (6 + 43)7^{2n+1} \\ &= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 43 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 43 \cdot s + 43 \cdot 7^{2n+1}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde. Daher ist diese Zahl ein Vielfaches von 43.

Aufgabe 1.4. Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$(1, 0, 0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, -2, 5), (4, 0, 3) \text{ und } (2, 1, 1)$$

aus.

Lösung

Es geht darum, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x+4y+2z &= 1\\ -2x \quad\;\; +z &= 0\\ 5x+3y+z &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Wir eliminieren mit Hilfe der ersten Gleichung die Variable y aus der dritten Gleichung. Das resultierende System ist ($III' = 3I - 4III$)

$$\begin{aligned} x+4y+2z &= 1\\ -2x \quad\;\; +z &= 0\\ -17x \quad\;\; +2z &= 3\,. \end{aligned}$$

Wir eliminieren nun aus III' mittels II die Variable z, das ergibt ($III'-2II$)

$$\begin{aligned} x+4y+2z &= 1\\ -2x \quad\;\; +z &= 0\\ -13x \qquad\quad &= 3\,. \end{aligned}$$

Wir können jetzt dieses System lösen. Es ist

$$x = -\frac{3}{13}\,,$$

$$z = 2x = -\frac{6}{13}$$

und

$$y = \frac{-5x-z}{3} = \frac{15+6}{39} = \frac{21}{39} = \frac{7}{13}.$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{13}\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 5 \end{pmatrix} + \frac{7}{13}\begin{pmatrix} 4\\ 0\\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{13}\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.5. Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2\\ 3 & -2 & 7 & -1\\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{pmatrix}.$$

Lösung

Es geht darum, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z + 2w &= 0 \\ 3x - 2y + 7z \quad - w &= 0 \\ 2x \quad - y - 4z + 3w &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Wir eliminieren mit Hilfe der ersten Gleichung die Variable y. Das resultierende System ist ($II' = II + 2I$, $III' = III + I$)

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z + 2w &= 0 \\ 7x \quad + 17z + 3w &= 0 \\ 4x \quad + z + 5w &= 0 \,. \end{aligned}$$

Wir eliminieren nun aus II' mittels III' die Variable z, das ergibt ($II' - 17III'$)

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z + 2w &= 0 \\ 4x \quad + z + 5w &= 0 \\ -61x \quad - 82w &= 0 \,. \end{aligned}$$

Wir können jetzt dieses System lösen, wobei $x \neq 0$ die anderen Variablen eindeutig festlegt. Sei $x = 82$. Dann ist $w = -61$. Damit ist

$$z = -4x - 5w = -4 \cdot 82 - 5(-61) = -328 + 305 = -23.$$

Schließlich ist

$$y = -2x - 5z - 2w = -2(82) - 5(-23) - 2(-61) = -164 + 115 + 122 = 73 \,.$$

Die Lösungsmenge, also der Kern, ist somit

$$\{s \begin{pmatrix} 82 \\ 73 \\ -23 \\ -61 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\} \,.$$

Aufgabe 1.6. Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + x & -x \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 1 & x^2 - x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Lösung

Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist. Die Determinante der Matrix ist

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} x^2+x & -x \\ -x^3+2x^2+5x-1 & x^2-x \end{pmatrix} &= (x^2+x)(x^2-x)+x(-x^3+2x^2+5x-1) \\ &= x^4-x^2-x^4+2x^3+5x^2-x \\ &= 2x^3+4x^2-x \\ &= x(2x^2+4x-1).\end{aligned}$$

Dies ist gleich 0 bei $x_1 = 0$ oder bei $2x^2 + 4x - 1 = 0$. Diese quadratische Gleichung ist äquivalent zu $x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$ bzw. zu

$$(x+1)^2 - 1 - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Also ist

$$x + 1 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

und damit

$$x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \text{ und } x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\,.$$

Die einzigen komplexen Zahlen, bei denen die Matrix nicht invertierbar ist, sind also

$$0,\ \sqrt{\frac{3}{2}} - 1,\ -\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\,.$$

Aufgabe 1.7. Es sei V ein Vektorraum und

$$v_1, \ldots, v_n$$

eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Familie genau dann eine Basis von V bildet, wenn es sich um ein minimales Erzeugendensystem handelt (d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor).

Lösung

Die Familie sei zunächst eine Basis. Dann ist sie insbesondere ein Erzeugendensystem. Nehmen wir einen Vektor, sagen wir v_1, aus der Familie heraus. Wir müssen zeigen, dass dann die verbleibende Familie, also $v_2, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem mehr ist. Wenn sie ein Erzeugendensystem wäre, so wäre insbesondere v_1 als Linearkombination der Vektoren darstellbar, d.h. man hätte

$$v_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i \,.$$

Dann ist aber

$$v_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Familie.

Sei nun die Familie ein minimales Erzeugendensystem. Um zu zeigen, dass eine Basis vorliegt, muss also lediglich gezeigt werden, dass die Familie linear unabhängig ist. Nehmen wir an, sie sei nicht linear unabhängig. Dann gibt es eine Darstellung

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0 \,,$$

wobei mindestens ein Koeffizient $a_i \neq 0$ ist. Wir behaupten, dass dann auch die um v_i reduzierte Familie noch ein Erzeugendensystem ist im Widerspruch zur Minimalität. Dazu sei $v \in V$ ein beliebiger Vektor, den man als

$$v = b_1 v_1 + \ldots + b_i v_i + \ldots + b_n v_n$$

schreiben kann. Wir können v_i schreiben als

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \ldots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \ldots - \frac{a_n}{a_i} v_n \,.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} v &= b_1 v_1 + \ldots + b_i v_i + \ldots + b_n v_n \\ &= b_1 v_1 + \ldots + b_i \left(-\frac{a_1}{a_i} v_1 - \ldots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \ldots - \frac{a_n}{a_i} v_n\right) + \ldots + b_n v_n , \end{aligned}$$

woraus ablesbar ist, dass man v auch als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_{i-1}$, $v_{i+1}, \ldots, v_n$ darstellen kann.

Aufgabe 1.8. Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Für $n \geq 1$ kann man die Folge (durch Erweiterung mit $1/n^3$) schreiben als

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8} = \frac{3 - \frac{1}{n} - \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{8}{n^3}} \,.$$

Folgen vom Typ a/n, a/n^2 und a/n^3 sind Nullfolgen. Aufgrund der Summenregel für konvergente Folgen konvergiert der Zähler gegen 3 und der Nenner gegen 2, so dass nach der Quotientenregel die Folge insgesamt gegen $3/2 \in \mathbb{Q}$ konvergiert.

Aufgabe 1.9. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\, n}{n^2}$$

konvergiert.

Lösung

Wir zeigen, dass die Reihe absolut konvergiert, woraus nach Satz 14.9 die Konvergenz folgt. Wegen $-1 \leq \sin\, x \leq 1$ ist

$$|\frac{\sin\, n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach Beispiel 14.12, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\sin\, x}{n^2}|$ nach dem Majorantenkriterium konvergiert.

Aufgabe 1.10. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln\, x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Lösung

Die Funktion f ist differenzierbar und die Ableitung ist

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,.$$

Für $x > 0$ sind diese beiden Summanden positiv, so dass die Ableitung stets positiv ist und f daher streng wachsend ist. Daher ist die Abbildung injektiv. Die Funktion ist stetig, da sie differenzierbar ist. Daher genügt es für die Surjektivität, aufgrund des Zwischenwertsatzes, nachzuweisen, dass beliebig große und beliebig kleine Werte angenommen werden.

Für $0 < x < 1$ ist $1 - \frac{1}{x} < 0$ und daher

$$f(x) \leq \ln\, x\,.$$

Da der Logarithmus für $x \to 0$ beliebig kleine Werte annimmt, gilt das auch für f.

Für $x > 1$ ist $1 - \frac{1}{x} > 0$ und daher

$$f(x) \geq \ln x \,.$$

Da der Logarithmus für $x \to \infty$ beliebig große Werte annimmt, gilt das auch für f.

b) Durch Einsetzen ergibt sich $f(1) = 0$, also ist $u = 1$ das Urbild von 0. Aufgrund der Berechnung der Ableitung oben ist

$$f'(1) = 2 \,.$$

Aufgrund der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt daher

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2} \,.$$

Aufgabe 1.11. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Lösung

Da die Exponentialfunktion keine Nullstelle besitzt, liegt nur bei $2x + 3 = 0$, also bei $x_0 = -\frac{3}{2}$ eine Nullstelle vor. Unterhalb davon ist die Funktion negativ, oberhalb davon positiv.

Zur Bestimmung der lokalen Extrema leiten wir ab, was zu

$$f'(x) = 2e^{-x^2} + (2x+3)(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(-4x^2 - 6x + 2)$$

führt. Die Nullstellenbestimmung der Ableitung führt auf

$$x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \,.$$

Quadratisches Ergänzen führt zu

$$(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = 0$$

bzw.

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{17}{16} \,.$$

Also ist

$$x + \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

und somit
$$x_1 = -\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3}{4} \text{ und } x_2 = +\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3}{4}\,.$$
Für $x < x_1$ ist die Ableitung negativ, für x mit $x_1 < x < x_2$ ist sie positiv und für $x > x_2$ wieder negativ. Daher ist die Funktion f unterhalb von x_1 streng fallend, zwischen x_1 und x_2 streng wachsend und oberhalb von x_2 wieder streng fallend. Daher liegt in x_1 ein isoliertes lokales Minimum und in x_2 ein isoliertes lokales Maximum vor. Da es sonst keine lokalen Extrema gibt, und die Funktion für $x \to -\infty$ wächst, aber negativ bleibt, und für $x \to +\infty$ fällt, aber positiv bleibt, sind dies auch globale Extrema.

Aufgabe 1.12. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Die erste Ableitung ist
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \text{ also } f'(2) = -\frac{1}{4}\,.$$
Die zweite Ableitung ist
$$f''(x) = 2x^{-3}, \text{ also } f''(2) = \frac{1}{4}\,.$$
Die dritte Ableitung ist
$$f'''(x) = -6x^{-4}, \text{ also } f'''(2) = -\frac{3}{8}\,.$$
Die vierte Ableitung ist
$$f''''(x) = 24x^{-5}, \text{ also } f''''(2) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}\,.$$
Das Taylor-Polynom vom Grad 4 ist demnach
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4\cdot 2}(x-2)^2 - \frac{3}{8\cdot 3!}(x-2)^3 + \frac{3}{4\cdot 4!}(x-2)^4$$
bzw.
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4\,.$$

Aufgabe 1.13. Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt}\,.$$

Lösung

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto h(x) = f(x) - g(x).$$

Nach den Voraussetzungen ist h differenzierbar, es ist $h(a) \geq 0$ und es ist $h'(x) \geq 0$ für alle $x \geq a$. Wir müssen zeigen, dass $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq a$ ist. Nehmen wir also an, dass es ein $x > a$ gibt mit $h(x) < 0$. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es ein $c \in [a, x]$ mit

$$h'(c) = \frac{h(x) - h(a)}{x - a}\,.$$

Da diese Zahl negativ ist, ergibt sich ein Widerspruch.

Aufgabe 1.14. Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 2x^3 + 3e^x - \sin x\,,$$

über $[-1, 0]$.

Lösung

Eine Stammfunktion ist

$$\frac{1}{2}x^4 + 3e^x + \cos x\,.$$

Daher ist das bestimmte Integral gleich

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} f(x)\,dx &= \left(\frac{1}{2}x^4 + 3e^x + \cos x\right)\Big|_{-1}^{0} \\ &= (0 + 3 + 1) - \left(\frac{1}{2}(-1)^4 + 3e^{-1} + \cos(-1)\right) \\ &= \frac{7}{2} - 3e^{-1} - \cos(-1)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.15. Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.

Lösung

Es liegt eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen vor. Wir setzen

$$h(y) = \frac{1}{y^2} \, ,$$

davon ist

$$H(y) = -y^{-1}$$

eine Stammfunktion. Die Umkehrfunktion davon ist ebenfalls

$$H^{-1}(u) = -u^{-1} \, .$$

Wir setzen weiter $g(t) = \frac{t}{t^2-1}$. Wir machen den Ansatz für die Partialbruchzerlegung, also

$$\frac{t}{t^2 - 1} \; = \; \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} .$$

Daraus ergibt sich die Bedingung

$$t \; = \; a(t+1) + b(t-1)$$

und daraus

$$a = b = \frac{1}{2} \, .$$

Also ist

$$G(t) = \frac{1}{2} \ln(t+1) + \frac{1}{2} \ln(t-1)$$

eine Stammfunktion von $g(t)$. Daher ist

$$y(t) = \frac{-2}{\ln(t-1) + \ln(t+1)}$$

eine Lösung, die für $t > 1$ definiert ist und für die $y(t) < 0$ gilt.