Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 12

Heron von Alexandria (1. Jahrhundert n.C.)

Reelle Zahlenfolgen

Wir beginnen mit einem motivierenden Beispiel.

Beispiel 12.1. Wir wollen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl „berechnen“, sagen wir von 5. Eine solche Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 5$ gibt es nicht innerhalb der rationalen Zahlen, wie aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt. Wenn $x \in \mathbb{R}$ ein solches Element ist, so hat auch $-x$ diese Eigenschaft. Mehr als zwei Lösungen kann es aber nach Korollar 4.11 nicht geben, so dass wir nur nach der positiven Lösung suchen müssen.

Obwohl es innerhalb der rationalen Zahlen keine Lösung für die Gleichung $x^2 = 5$ gibt, so gibt es doch beliebig gute Approximationen innerhalb der rationalen Zahlen dafür. Beliebig gut heißt dabei, dass der Fehler (oder die Abweichung) unterhalb jede positive Schranke gedrückt werden kann. Das klassische Verfahren, um eine Quadratwurzeln beliebig anzunähern, ist das *Heron-Verfahren*, das man auch *babylonisches Wurzelziehen* nennt. Dies ist ein *iteratives Verfahren*, d.h., die nächste Approximation wird aus den vorausgehenden Approximationen berechnet. Beginnen wir mit $a := x_0 := 2$ als erster Näherung. Wegen

$$x_0^2 = 2^2 = 4 < 5$$

ist x_0 zu klein, d.h. es ist $x_0 < x$. Aus $a^2 < 5$ (mit a positiv) folgt zunächst $5/a^2 > 1$ und daraus $(5/a)^2 > 5$, d.h. $5/a > \sqrt{5}$. Man hat also die Abschätzungen

$$a < \sqrt{5} < 5/a\,,$$

wobei rechts eine rationale Zahl steht, wenn links eine rationale Zahl steht. Eine solche Abschätzung vermittelt offenbar eine quantitative Vorstellung darüber, wo $\sqrt{5}$ liegt. Die Differenz $5/a - a$ ist ein Maß für die Güte der Approximation.

Beim Startwert 2 ergibt sich, dass die Quadratwurzel von $\sqrt{5}$ zwischen 2 und $5/2$ liegt. Man nimmt nun das arithmetische Mittel der beiden Intervallgrenzen, also

$$x_1 := \frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}.$$

Wegen $\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} > 5$ ist dieser Wert zu groß und daher liegt $\sqrt{5}$ im Intervall $[5 \cdot \frac{4}{9}, \frac{9}{4}]$. Von diesen Intervallgrenzen nimmt man erneut das arithmetische Mittel und setzt

$$x_2 := \frac{5 \cdot \frac{4}{9} + \frac{9}{4}}{2} = \frac{161}{72}$$

als nächste Approximation. So fortfahrend erhält man eine immer besser werdende Approximation von $\sqrt{5}$.

Allgemein ergibt sich das folgende Heron-Verfahren.

Beispiel 12.2. Beim *Heron-Verfahren* zur Berechnung von $\sqrt{c}$ einer positiven Zahl c geht man iterativ wie folgt vor. Man startet mit einem beliebigen positiven Startwert x_0 und berechnet davon das arithmetische Mittel aus x_0 und c/x_0. Dieses Mittel nennt man x_1. Es gilt

$$x_1^2 - c = \left(\frac{x_0 + \frac{c}{x_0}}{2}\right)^2 - c = \frac{x_0^2 + 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} - c = \frac{x_0^2 - 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} = \left(\frac{x_0 - \frac{c}{x_0}}{2}\right)^2.$$

D.h. dass x_1 mindestens so groß wie $\sqrt{c}$ ist. Auf x_1 wendet man iterativ das gleiche Verfahren an und erhält so x_2 usw. Die Definition von x_{n+1} lautet also

$$x_{n+1} = \frac{x_n + c/x_n}{2}\,.$$

Nach Konstuktion weiß man, dass $\sqrt{c}$ in jedem Intervall $[c/x_n, x_n]$ (für $n \geq 1$) liegt, da aus $x_n^2 \geq c$ und $x_n \cdot c/x_n = c$ folgt, dass $\left(\frac{c}{x_n}\right)^2 \leq c$ ist. Bei jedem Schritt gilt

$$[\frac{c}{x_{n+1}}, x_{n+1}] \subseteq [\frac{c}{x_n}, x_n]\,,$$

d.h. das Nachfolgerintervall liegt innerhalb des Vorgängerintervalls. Dabei wird bei jedem Schritt die Intervalllänge mindestens halbiert.

Das eben beschriebene Verfahren liefert also zu jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl, die eine durch eine gewisse algebraische Eigenschaft charakterisierte Zahl beliebig gut approximiert. Bei vielen technischen Anwendungen genügt es, gewisse Zahlen nur hinreichend genau zu kennen, wobei allerdings die benötigte Güte der Approximation von der technischen Zielsetzung abhängt. Es gibt im Allgemeinen keine Güte, die für jede vorstellbare Anwendung ausreicht, so dass es wichtig ist zu wissen, wie man eine gute Approximation durch eine bessere Approximation ersetzen kann und wie viele Schritte man machen muss, um eine gewünschte Approximation zu erreichen. Dies führt zu den Begriffen Folge und Konvergenz.

Definition 12.3. Eine *reelle Folge* ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\, n \longmapsto x_n.$$

Eine Folge wird zumeist als $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, oder einfach nur kurz als $(x_n)_n$ geschrieben. Manchmal sind Folgen nicht für alle natürlichen Zahlen definiert, sondern nur für alle natürlichen Zahlen $\geq N$. Alle Begriffe und Aussagen lassen sich dann sinngemäß auch auf diese Situation übertragen. Grundsätzlich gibt es Folgen in jeder Menge, für die meisten Eigenschaften, für die man sich im Kontext von Folgen interessiert, braucht man aber eine zusätzliche „topologische Struktur“, wie sie in $\mathbb{R}$ existiert. Dies gilt insbesondere für den folgenden Begriff.

Definition 12.4. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und es sei $x \in \mathbb{R}$. Man sagt, dass die Folge gegen x *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem positiven $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

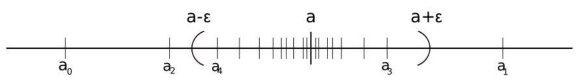
gilt. In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

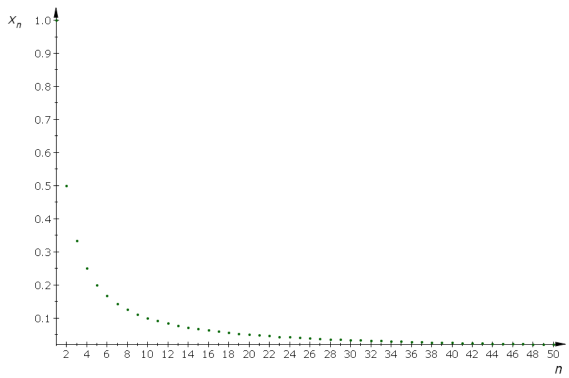
$$\lim_{n \to \infty} x_n := x\,.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Man sollte sich dabei das vorgegebene ϵ als eine kleine, aber positive Zahl vorstellen, die eine gewünschte *Zielgenauigkeit* (oder erlaubten Fehler) ausdrückt. Die natürliche Zahl n_0 ist dann die *Aufwandszahl*, die beschreibt, wie weit man gehen muss, um die gewünschte Zielgenauigkeit zu erreichen, und zwar so zu erreichen, dass alle ab n_0 folgenden Glieder innerhalb dieser Zielgenauigkeit bleiben. Konvergenz bedeutet demnach, dass man jede gewünschte Genauigkeit bei hinreichend großem Aufwand auch erreichen kann. Je kleiner der Fehler, also je besser die Approximation sein sollen, desto höher ist im Allgemeinen der Aufwand. Statt mit beliebigen positiven reellen Zahlen ϵ kann man auch mit den *Stammbrüchen*, also den rationalen Zahlen $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}_+$, arbeiten, siehe Aufgabe 12.3.

Zu einem $\epsilon > 0$ und einer reellen Zahl x nennt man das Intervall $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ auch die ϵ-*Umgebung* von x. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.





Beispiel 12.5. Eine *konstante Folge* $x_n := c$ ist stets konvergent mit dem Grenzwert c. Dies folgt direkt daraus, dass man für jedes $\epsilon > 0$ als Aufwandszahl $n_0 = 0$ nehmen kann. Es ist ja

$$|x_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \epsilon$$

für alle n.

Die Folge

$$x_n = \frac{1}{n}$$

ist konvergent mit dem Grenzwert 0. Sei dazu ein beliebiges positives ϵ vorgegeben. Aufgrund des Archimedes Axioms gibt es ein n_0 mit $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$. Insgesamt gilt damit für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$x_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

Lemma 12.6. *Eine reelle Folge besitzt maximal einen Grenzwert.*

Beweis. Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte x, y, $x \neq y$, gibt. Dann ist $d := |x - y| > 0$. Wir betrachten $\epsilon := d/3 > 0$. Wegen der

Konvergenz gegen x gibt es ein n_0 mit
$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$
und wegen der Konvergenz gegen y gibt es ein n_0' mit
$$|x_n - y| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0' .$$
Beide Bedingungen gelten dann gleichermaßen für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$. Sei n mindestens so groß wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch
$$d = |x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \epsilon + \epsilon = 2d/3.$$
□

Beschränktheit

Definition 12.7. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen.

(1) Ein Element $S \in \mathbb{R}$ heißt eine *obere Schranke* für M, wenn $x \leq S$ gilt für alle $x \in M$.
(2) Ein Element $s \in \mathbb{R}$ heißt eine *untere Schranke* für M, wenn $x \geq s$ gilt für alle $x \in M$.
(3) M heißt *nach oben beschränkt*, wenn eine obere Schranke für M existiert.
(4) M heißt *nach unten beschränkt*, wenn eine untere Schranke für M existiert.
(5) M heißt *beschränkt*, wenn M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.
(6) Eine obere Schranke T von M heißt das *Supremum* von M, wenn $T \leq S$ für alle oberen Schranken S von M gilt.
(7) Eine untere Schranke t von M heißt das *Infimum* von M, wenn $t \geq s$ für alle unteren Schranken s von M gilt.
(8) Das Supremum T von M heißt *Maximum*, wenn $T \in M$ ist.
(9) Das Infimum t von M heißt *Minimum*, wenn $t \in M$ ist.

Obere und untere Schranken muss es nicht geben. Wenn S eine obere Schranke ist, so ist auch jede größere Zahl eine obere Schranke. Für das offene Intervall $]0,1[$ ist 1 das Supremum, aber nicht das Maximum, da 1 nicht dazu gehört. Entsprechend ist 0 das Infimum, aber nicht das Minimum. Beim abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ sind die beiden Grenzen Maximum und Minimum.

All diese Begriffe werden auch für Folgen angewendet, und zwar für die Bildmenge $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. Für die Folge $1/n$, $n \in \mathbb{N}_+$, ist 1 das Maximum und das Supremum, 0 ist das Infimum, aber nicht das Minimum.

Lemma 12.8. *Eine konvergente reelle Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit dem Limes $x \in \mathbb{R}$ und es sei $\epsilon > 0$. Aufgrund der Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\,.$$

Dann ist insbesondere

$$|x_n| \leq |x| + |x - x_n| \leq |x| + \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\,.$$

Unterhalb von n_0 gibt es nur endlich viele Zahlen, so dass das Maximum

$$B := \max_{n<n_0}\{|x_n|,\, |x| + \epsilon\}$$

wohldefiniert ist. Dies ist eine Schranke für alle $|x_n|$. □

Es ist einfach, beschränkte, aber nicht konvergente Folgen anzugeben.

BEISPIEL 12.9. Es sei $c > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann ist die *alternierende Folge*

$$x_n := (-1)^n c$$

beschränkt, aber nicht konvergent. Die Beschränktheit folgt direkt aus

$$|x_n| \;=\; |(-1)^n||c| \;=\; c.$$

Konvergenz liegt aber nicht vor. Wäre nämlich $x \geq 0$ der Grenzwert, so gilt für positives $\epsilon < c$ und jedes ungerade n die Beziehung

$$|x_n - x| \;=\; |-c - x| \;=\; c + x \;\geq\; c \;>\; \epsilon,$$

so dass es Folgenwerte außerhalb dieser ϵ-Umgebung gibt. Analog kann man einen negativ angenommen Grenzwert zum Widerspruch führen.

Das Quetschkriterium

LEMMA 12.10. *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist* $\lim_{n\to\infty} x_n \;\geq\; \lim_{n\to\infty} y_n$.

Beweis. Siehe Aufgabe 12.5. □

Die folgende Aussage heißt *Quetschkriterium*.

LEMMA 12.11. *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.

Beweis. Siehe Aufgabe 12.6. □

DEFINITION 12.12. Die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *wachsend*, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, und *streng wachsend*, wenn $x_{n+1} > x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *fallend*, wenn $x_{n+1} \leq x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, und *streng fallend*, wenn $x_{n+1} < x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Als gemeinsamen Begriff für (streng) waschsende oder (streng) fallende Folgen verwendet man die Bezeichnung (streng) *monotone Folgen.*

Man stelle sich nun eine wachsende Folge vor, die aber dennoch beschränkt ist. Muss eine solche Folge konvergieren? Wird dadurch eine reelle Zahl definiert? In der Tat ist dies eine Version des Vollständigkeitsaxioms von $\mathbb{R}$, dem wir uns in der nächsten Vorlesung zuwenden.

Abbildungsverzeichnis