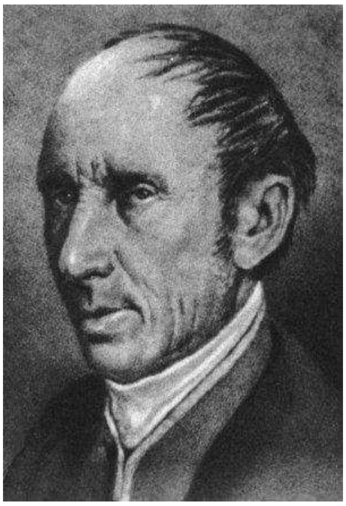
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Vorkurs Mathematik

Vorlesung 5

Cauchy-Folgen

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man beispielsweise die durch das babylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in $\mathbb{R}$ betrachten, wo $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Definition 5.1. Eine reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Satz 5.2. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

Für beliebige $n, m \geq n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \;\leq\; |x_n - x| + |x - x_m| \;\leq\; \epsilon/2 + \epsilon/2 \;=\; \epsilon.$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. □

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Axiom 5.3. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind vollständig, d.h. jede reelle Cauchy-Folge besitzt einen Grenzwert.

Damit haben wir alle Axiome der reellen Zahlen zusammengetragen: die Körperaxiome, die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ gibt, die beide für sich genommen diese Axiome erfüllen, so kann man eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_1$ nach $\mathbb{R}_2$ angeben, der alle mathematischen Strukturen erhält (sowas nennt man einen „Isomorphismus“).

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man, und das haben wir bisher getan und werden wir auch weiterhin tun, die Vorstellung einer „kontinuierlichen Zahlengerade“ zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengeren mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von $\mathbb{Q}$ aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit einer geeigneten Identifizierung.

Konvergenz der Zifferndarstellung

Aus der Vollständigkeit ergeben sich wichtige Resultate über die Existenz von Zahlen, nämlich in dem Sinne, dass Approximationsverfahren in der Tat reelle Zahlen liefern. Als erstes kehren wir zur Zifferndarstellung zurück.

Satz 5.4. *Eine Zifferndarstellung (im Dezimalsystem) definiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl. Wenn*

$$0, z_1 z_2 z_3 \ldots$$

die Zifferndarstellung bezeichnet, so ist die Zahl der Grenzwert der durch

$$x_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} z_i 10^{-i}$$

gegebenen Folge.

Beweis. Es sei eine unendliche Zifferndarstellung (oder Dezimalentwicklung) gegeben, wobei wir uns nur um Darstellungen der Form $0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ kümmern müssen. Es genügt zu zeigen, dass die zugehörige Folge

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} z_i 10^{-i}$$

eine Cauchy-Folge ist. Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besitzt dann die Zifferndarstellung einen eindeutigen Grenzwert, und dieser ist die durch die Zifferndarstellung bestimmte Zahl. Dazu betrachten wir die Differenz (für $m \geq n$)

$$\begin{aligned} x_m - x_n &= \sum_{i=0}^{m} z_i 10^{-i} - \sum_{i=0}^{n} z_i 10^{-i} \\ &= \sum_{i=n+1}^{m} z_i 10^{-i} \\ &= 10^{-n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} z_{j+n+1} 10^{-j} \right) \\ &\leq 10^{-n} \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} 10^{-j} \right), \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Abschätzung verwendet haben, dass die Ziffern kleiner als 10 sind. Nach Aufgabe 5.17 gilt für die Summe rechts die Gleichheit

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-n-1} 10^{-j} &= \sum_{j=0}^{m-n-1} \left(\frac{1}{10} \right)^{-j} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &\leq \frac{1}{\frac{9}{10}} \\ &= \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

Bei gegebenem n haben wir also für jedes $m \geq n$ die Abschätzung

$$x_m - x_n \leq 10^{-n} \frac{10}{9}.$$

Zu einem beliebig vorgegebem $\epsilon > 0$ finden wir zuerst ein n_0 mit

$$10^{-n_0} \frac{10}{9} \leq \epsilon$$

und für $m \geq n \geq n_0$ gilt dann

$$x_m - x_n \leq \epsilon.$$

$\square$

Satz 5.5. *Zu einer reellen Zahl $x \in [0,1[$ erhält man eine Zifferentwicklung (im Dezimalsystem) durch die rekursive Bestimmung*

$$r_0 = x,\ z_{i+1} = \lfloor r_i \cdot 10 \rfloor \text{ und } r_{i+1} = r_i \cdot 10 - z_{i+1}\,,$$

die x darstellt.

Beweis. Zu jeder reellen Zahl $s \in [a,b[$ in einem halboffenen Intervall gibt es ein eindeutiges j, $0 \leq j \leq 9$, mit

$$s \in [a + \frac{j}{10}(b-a), a + \frac{j+1}{10}(b-a)[\,,$$

da diese Intervalle eine disjunkte Zerlegung von $[a,b[$ bilden. Bei $[a,b[= [0,1[$ kann man das j als $j = \lfloor 10s \rfloor$ finden. Das angegebene Rekursionsschema funktioniert auf diese Weise, d.h. $\frac{z_1}{10}$ mit $z_1 = \lfloor 10r_0 \rfloor$ ist die linke Grenze des halboffenen Teilintervalls der Länge $\frac{1}{10}$ an, in dem r_0 liegt. Die Zahl $r_1 = 10r_0 - z_1$ gibt somit das Zehnfache des Abstands der Zahl r_0 von der linken Grenze des Teilintervalls an. Induktiv sieht man, dass z_i eine natürliche Zahl zwischen 0 und 9 ist, dass $r_i \in [0,1[$ ist und dass

$$r \in [\sum_{i=1}^{k} z_i 10^{-i}, \sum_{i=1}^{k} z_i 10^{-i} + 10^{-k}[$$

für jedes k ist. Daher ist $0, z_1 z_2 z_3 ...$ eine Ziffernentwicklung. Deren nach Satz 5.4 zugehörige Zahl muss gleich r sein. □

Die im vorstehenden Satz formulierte Ziffernentwicklung nennt man auch die *kanonische Ziffernentwicklung*; sie ist in eindeutiger Weise einer reellen Zahl zugeordnet. Die Ziffernentwicklung

$$0,9999999999999999999999999999999999999999...$$

ist zwar eine erlaubte Ziffernentwicklung, aber keine kanonische Ziffernentwicklung. Die zugehörige reelle Zahl ist die 1, und deren kanonische Ziffernentwicklung ist

$$1,0000000000000000000000000000000000000000\ldots.$$

Satz 5.6. *Eine reelle Zahl ist genau dann eine rationale Zahl, wenn sie eine periodische Ziffernentwicklung (im Dezimalsystem) besitzt.*

Beweis. Es sei $r = \frac{a}{b}$ eine rationale Zahl, von der wir annehmen können, dass sie in $[0,1[$ liegt. Es sei

$$0, z_1 z_2 z_3 ...$$

die nach Satz 5.5 zugehörige Zifferenentwicklung gemäß dem Rekursionsschema $z_{i+1} = \lfloor 10r_i \rfloor$ und $r_{i+1} = 10r_i - z_{i+i}$. Es ist einerseits $r_i \in [0,1[$ und andererseits sind die r_i rationale Zahlen mit b als Nenner. D.h. r_i muss eine der b Zahlen

$$0, \frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \frac{3}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}$$

sein. Unter den $r_1, r_2, r_3, \ldots$ muss es also irgendwann eine Wiederholung geben, sagen wir $r_k = r_\ell$ mit $\ell > k$. Da die Zahlen z_{i+1} und r_{i+1} nur von r_i abhängen, ist $r_{\ell+1} = r_{k+1}$, $r_{\ell+2} = r_{k+2}$, u.s.w, d.h., es liegt eine Periodizität vor. Es liege eine periodische Ziffernentwicklung für die reelle Zahl x vor. Da sich die Eigenschaft, eine rationale Zahl zu sein, nicht bei Multiplikation mit einer rationalen Zahl $\neq 0$ und bei Addition mit einer rationalen Zahl ändert, können wir sofort annehmen, dass die Ziffernentwicklung die Form

$$0, z_1 z_2 \ldots z_m z_1 z_2 \ldots z_m z_1 z_2 \ldots z_m z_1 z_2 \ldots z_m \ldots$$

besitzt. Diese Zahl können wir als

$$\left(\sum_{i=1}^{m} z_i 10^i \right) \cdot 0,00\ldots 00100\ldots 00100\ldots 00100\ldots 001\ldots$$

schreiben, wobei die Einsen an der m-ten, $2m$-ten u.s.w. Stelle stehen. Wir müssen uns also nur noch um periodische Ziffernentwicklungen von dieser speziellen Art kümmern. Wir betrachten die Folge

$$y_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{1}{10} \right)^{\ell m},$$

deren Glieder approximierende abbrechende Ziffernentwicklungen von x sind (wobei manche übersprungen werden). Aufgrund von Aufgabe 5.17 ist

$$\sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{1}{10} \right)^{\ell m} = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{(\ell+1)m}}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{m}} - 1.$$

Der Limes davon (für ℓ gegen unendlich) ist, da ja $\left(\frac{1}{10}\right)^{(\ell+1)m}$ gegen 0 konvergiert, gleich

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{m}} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{99\cdots 99}{10^m}\right)} - 1 = \frac{10^m}{99\cdots 99} - 1 = \frac{1}{99\cdots 99},$$

wobei jeweils m Neunen vorkommen. Diese Zahl ist also rational. $\square$

Die entsprechende Aussage gilt für die Ziffernentwicklung zu jeder Basis, nicht nur im Dezimalsystem. Eine reelle Zahl mit einer periodischen Ziffernentwicklung wird so geschrieben, dass man einen Strich über die Periode macht, also beispielsweise

$$351,0528\overline{82700}\,.$$

Intervallschachtelungen

Definition 5.7. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N}\,,$$

in $\mathbb{R}$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}} ,$$

gegen 0 konvergiert.

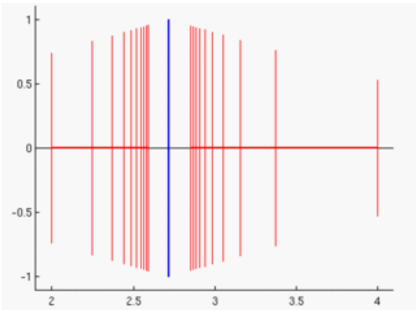
SATZ 5.8. *Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann besteht der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.

Beweis. Siehe Aufgabe 5.6. $\square$

Die eulersche Zahl e



Wir besprechen eine Beschreibung der sogenannten *eulerschen Zahl e*.

LEMMA 5.9. *Die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 1$, mit den Grenzen*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ und } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

definieren eine Intervallschachtelung.

Beweis. Wegen $1 + \frac{1}{n} > 1$ ist klar, dass

$$a_n < a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = b_n$$

ist, so dass also wirklich Intervalle vorliegen. Um zu zeigen, dass die Intervalle ineinander liegen, zeigen wir, dass die unteren Grenzen wachsend und die oberen Grenzen fallend sind. Wir betrachten zuerst $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aufgrund der Bernoulli-Ungleichung gilt

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Dies schreiben wir als

$$\frac{n-1}{n} \leq \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n .$$

Daraus ergibt sich durch beidseitige Multiplikation mit $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ (es sei $n \geq 2$) die Abschätzung

$$a_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = a_n.$$

Für die oberen Intervallgrenzen b_n ergibt die Bernoullische Ungleichung die Abschätzung

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} \geq 1+\frac{1}{n}.$$

Daraus folgt

$$1+\frac{1}{n} \leq \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n .$$

Durch beidseitige Multiplikation mit $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ergibt sich

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = b_{n-1}.$$

Wir betrachten schließlich die Intervalllängen. Diese sind

$$b_n - a_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) - a_n = a_n\frac{1}{n} \leq \frac{b_1}{n}$$

und konvergieren somit gegen 0. Also liegt insgesamt eine Intervallschachtelung vor. $\square$

Leonhard Euler (1707-1783)

Durch diese Intervallschachtelung ist aufgrund von Satz 5.8 eindeutig eine reelle Zahl bestimmt.

Definition 5.10. Die reelle Zahl

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

heißt *eulersche Zahl*.

Ihr nummerischer Wert ist

$$e = 2,718281828459\ldots.$$