Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

4. Beispielklausur mit Lösungen

Aufgabe 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *bijektive* Abbildung
$$f\colon M \longrightarrow N.$$
(2) Ein *Körper*.
(3) Eine *Teilfolge* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K.
(4) Das *Maximum* der Funktion
$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$
wird im Punkt $x \in M$ *angenommen*.
(5) Die *Potenzreihe* in $z \in \mathbb{C}$ zu den Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$.
(6) Die n-fache *stetige Differenzierbarkeit* einer Funktion
$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$
auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}$.
(7) Eine *obere Treppenfunktion* zu einer Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
(8) Eine *homogene lineare* gewöhnliche Differentialgleichung.

Lösung

(1) Die Abbildung f heißt bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.
(2) Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)
$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$
und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.
 (a) Axiome der Addition
  (i) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
  (ii) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.

(iii) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
(iv) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.

(b) Axiome der Multiplikation
(i) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
(ii) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
(iii) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
(iv) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.

(c) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

(3) Zu jeder streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto n_i$, heißt die Folge
$$i \mapsto x_{n_i}$$
eine *Teilfolge* der Folge.
(4) Man sagt, dass f in $x \in M$ das Maximum annimmt, wenn
$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt}.$$
(5) Die Potenzreihe in z ist die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n .$$
(6) Man sagt, dass f n-mal stetig differenzierbar ist, wenn f n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung $f^{(n)}$ stetig ist.
(7) Eine Treppenfunktion
$$t \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
heißt eine obere Treppenfunktion zu f, wenn $t(x) \geq f(x)$ für alle $x \in I$ ist.
(8) Eine Differentialgleichung der Form
$$y' = g(t)y$$
mit einer Funktion (I reelles Intervall)
$$g \colon I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$
heißt homogene lineare Differentialgleichung.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *Bernoulli-Ungleichung* für einen angeordneten Körper.
(2) Das *Majorantenkriterium* für eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ von komplexen Zahlen.
(3) Die *Division mit Rest* im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K.
(4) Der Satz über *partielle Integration*.

Lösung

(1) Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ ist
$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$
(2) Es gebe eine konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ von reellen Zahlen mit $|a_k| \leq b_k$ für alle k. Dann ist die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$
absolut konvergent.
(3) Es seien $P, T \in K[X]$ zwei Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ mit
$$P = TQ + R \text{ und mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R = 0\,.$$
(4) Es seien
$$f, g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt
$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = fg|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt\,.$$

Aufgabe 3. Es sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative reelle Zahl. Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gelte $x \leq \epsilon$. Zeige $x = 0$.

Lösung

Wir nehmen $x \neq 0$ an. Dann ist $x > 0$. Dann ist auch $\frac{x}{2} > 0$ und die Voraussetzung, angewandt auf $\epsilon = \frac{x}{2}$, ergibt $x \leq \frac{x}{2}$, woraus sich durch beidseitige Subtraktion von $\frac{x}{2}$ der Widerspruch $\frac{x}{2} \leq 0$ ergibt.

Aufgabe 4. Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $a_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen a_1, a_2, a_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Lösung

Die Formel für a_{n+1} lautet
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right).$$
Daher ist
$$a_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9+7}{3}\right) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

Somit ist

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{7}{8/3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{21}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{64+63}{24} = \frac{127}{48}.$$

Schließlich ist

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{127}{48} + \frac{7}{127/48}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{127}{48} + \frac{336}{127}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16129+16128}{6096} = \frac{32257}{12192}.$$

AUFGABE 5. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn sie genau einen Häufungspunkt besitzt.

Lösung

Sei zunächst die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert x. Dann ist die Folge nach Lemma 5.8 beschränkt. Der Grenzwert x ist insbesondere ein Häufungspunkt. Nehmen wir an, es würde noch einen weiteren Häufungspunkt $y \neq x$ geben. Für $\epsilon = \frac{|x-y|}{3}$ liegen dann aber alle bis auf endlich viele Folgenglieder innerhalb der ϵ-Umgebung (also $]x-\epsilon, x+\epsilon[$) von x, und daher kann es innerhalb der ϵ-Umgebung von y nur endlich viele Glieder geben.

Sei nun die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt mit dem einzigen Häufungspunkt x. Wir behaupten, dass die Folge gegen x konvergiert und nehmen an, dass sie nicht gegen x konvergiert. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es außerhalb der ϵ-Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder gibt. Dies bedeutet, dass es eine Teilfolge x_{n_i} gibt, die ganz außerhalb von $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ verläuft. Mit der Folge ist auch diese Teilfolge beschränkt. Daher gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (eine konvergente Teilfolge und) einen Häufungspunkt y der Folge x_{n_i}, der auch ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Dabei ist $x \neq y$, da es in der ϵ-Umgebung von x überhaupt keine Folgenglieder der Teilfolge x_{n_i} gibt.

AUFGABE 6. Beweise das Quotientenkriterium für Reihen.

Lösung

Die Konvergenz ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir $k_0 = 0$ annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \leq a_0 \cdot q^k.$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe.

AUFGABE 7. Es seien die beiden Polynome

$$P = X^2 + 3X - 5 \text{ und } Q = X^2 - 4X + 7$$

gegeben.

a) Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

b) Berechne die Ableitung von $P(Q)$ direkt und mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung

a) Es ist

$$\begin{aligned} P(Q) &= (X^2 - 4X + 7)^2 + 3(X^2 - 4X + 7) - 5 \\ &= X^4 + 16X^2 + 49 - 8X^3 + 14X^2 - 56X + 3X^2 - 12X + 21 - 5 \\ &= X^4 - 8X^3 + 33X^2 - 68X + 65. \end{aligned}$$

b) Die Ableitung von $P(Q)$ ist

$$(X^4 - 8X^3 + 33X^2 - 68X + 65)' = 4X^3 - 24X^2 + 66X - 68.$$

Es ist $P' = 2X + 3$ und

$$P'(Q) = 2(X^2 - 4X + 7) + 3 = 2X^2 - 8X + 17.$$

Nach der Kettenregel ist daher

$$\begin{aligned} (P(Q))' &= P'(Q) \cdot Q' \\ &= (2X^2 - 8X + 17)(2X - 4) \\ &= 4X^3 - 8X^2 - 16X^2 + 32X + 34X - 68 \\ &= 4X^3 - 24X^2 + 66X - 68. \end{aligned}$$

AUFGABE 8. Es sei $a \in \mathbb{R}$ und seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit

$$f(a) > g(a).$$

Zeige, dass es ein $\delta > 0$ derart gibt, dass

$$f(x) > g(x)$$

für alle $x \in [a - \delta, a + \delta]$ gilt.

Lösung

Sei

$$c := f(a) - g(a) > 0.$$

Da f und g stetig sind, gibt es zu

$$\epsilon := \frac{c}{3}$$

positive Zahlen δ_1 bzw. δ_2 derart, dass aus $|x-a| \leq \delta_1$ die Abschätzung $|f(x)-f(a)| \leq \epsilon$ und aus $|x-a| \leq \delta_2$ die Abschätzung $|g(x)-g(a)| \leq \epsilon$ folgt. Mit

$$\delta := \min(\delta_1, \delta_2,)$$

gilt somit für jedes $x \in [a-\delta, a+\delta]$ die Abschätzung

$$f(x) \geq f(a) - \epsilon > g(a) + \epsilon \geq g(x).$$

Aufgabe 9. Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer vierten Potenz, vermindert um das Doppelte ihrer dritten Potenz, gleich dem Negativen der Quadratwurzel von 42 ist?

Lösung

Es geht um eine reelle Lösung für die Gleichung

$$f(x) = x^4 - 2x^3 = -\sqrt{42}\,.$$

Für $x < 0$ und $x > 2$ ist $f(x) = x^3(x-2) > 0$, es kann also allenfalls in $[0,2]$ eine Lösung geben. Dazu bestimmen wir, wo die Funktion f ihr Minimum annimmt. Für die Ableitung gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3).$$

An den beiden Nullstellen 0 und $\frac{3}{2}$ sind die Werte

$$f(0) = 0$$

und

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}\left(\frac{3}{2}-2\right) = \frac{27}{8}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{16} > -2 > -\sqrt{42}.$$

Also ist das Minimum von f größer als $-\sqrt{42}$ und es gibt keine Lösung.

Aufgabe 10. Zu einem Startwert $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \sin x_n$$

definiert. Entscheide, ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Wir betrachten die Funktion

$$g(x) = x - \sin x$$

auf $[0, \frac{\pi}{2}]$. Wegen

$$g'(x) = 1 - \cos x$$

ist dies positiv für $x > 0$ und gleich 0 für $x = 0$. Daher ist g streng wachsend und es gilt

$$\sin x < x$$

für $x > 0$ und $\sin 0 = 0$. Daher ist die Folge zu jedem Startwert $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fallend und konvergiert gegen einen Grenzwert, da alle Folgenglieder nichtnegativ sind. Es sei a der Grenzwert, der wieder zu $[0, \frac{\pi}{2}]$ gehören muss. Wegen der rekursiven Beziehung

$$x_{n+1} = \sin x_n$$

und der Stetigkeit des Sinus folgt

$$a = \sin a\,.$$

Nach den bisherigen Überlegungen muss $a = 0$ sein. Die Folge konvergiert also bei jedem Startwert gegen 0.

Aufgabe 11. Zeige, dass die Sinus- bzw. die Kosinusfunktion die folgenden Werte besitzt.

a)

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b)

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Lösung

a) Es ist $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$ nach Satz 21.3 (3). Daher ist

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

da Kosinus eine gerade Funktion ist. Aus

$$1 = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ergibt sich

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Da $\sin \frac{\pi}{4} > 0$ ist, ist

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Nach den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus ist

$$\begin{aligned}
\sin(3\alpha) &= \cos\alpha \sin(2\alpha) + \cos(2\alpha)\sin\alpha \\
&= \cos\alpha\,(2\cos\alpha\,\sin\alpha) + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\sin\alpha \\
&= \sin\alpha\left(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) \\
&= \sin\alpha\left(4\cos^2\alpha - 1\right).
\end{aligned}$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ist also

$$0 \;=\; \sin\pi \;=\; \sin\frac{\pi}{3}\left(4\cos^2\frac{\pi}{3} - 1\right).$$

Wegen

$$\sin\frac{\pi}{3} \;\neq\; 0$$

ist somit

$$0 \;=\; 4\cos^2\frac{\pi}{3} - 1,$$

woraus sich

$$\cos^2\frac{\pi}{3} \;=\; \frac{1}{4}$$

ergibt. Da $\cos\frac{\pi}{3}$ positiv ist, folgt

$$\cos\frac{\pi}{3} \;=\; \frac{1}{2}.$$

c) Aus

$$1 \;=\; \cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3} \;=\; \frac{1}{4} + \sin^2\frac{\pi}{3}$$

folgt

$$\sin^2\frac{\pi}{3} \;=\; \frac{3}{4},$$

woraus sich wegen der Positivität von $\sin\frac{\pi}{3}$ schließlich

$$\sin\frac{\pi}{3} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ergibt.

Aufgabe 12. Bestimme für die Funktion

$$f(x) = 2^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

die Extrema.

Lösung

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x + 3^{-x} \\ &= e^{x\ln 2} + e^{-x\ln 3}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Extrema betrachten wir die Ableitung, diese ist

$$f'(x) \;=\; (\ln 2)e^{x\ln 2} - (\ln 3)e^{-x\ln 3}.$$

Die Bedingung $f'(x) = 0$ führt durch Multiplikation mit $e^{x\ln 3}$ auf

$$0 \;=\; (\ln 2)e^{x(\ln 2 + \ln 3)} - \ln 3.$$

Daher muss

$$e^{x \ln 6} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

sein, woraus sich

$$x \ln 6 = \ln \left(\frac{\ln 3}{\ln 2} \right),$$

also

$$x = \frac{\ln \left(\frac{\ln 3}{\ln 2} \right)}{\ln 6}$$

ergibt. Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = (\ln 2)^2 e^{x \ln 2} + (\ln 3)^2 e^{-x \ln 3}$$

und somit positiv, also liegt im angegebenen Punkt ein isoliertes lokales Minimum vor.

Aufgabe 13. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{5x+1}} dx .$$

Lösung

Wir arbeiten mit der bijektiven Substitution

$$y = \sqrt[3]{5x+1}$$

mit der Umkehrfunktion

$$x = \frac{y^3 - 1}{5}$$

und

$$dx = \frac{3y^2}{5} dy.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{5x+1}} dx &= \int_1^{\sqrt[3]{6}} \frac{\frac{y^3-1}{5}}{y} \cdot \frac{3y^2}{5} dy \\ &= \frac{3}{25} \int_1^{\sqrt[3]{6}} y^4 - y dy \\ &= \frac{3}{25} [\frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{2} y^2]_1^{\sqrt[3]{6}} \\ &= \frac{3}{25} \left(\frac{1}{5} \sqrt[3]{6}^5 - \frac{1}{2} \sqrt[3]{6}^2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{75} 6^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{50} 6^{\frac{2}{3}} + \frac{9}{250}. \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Beweise, dass eine stetige Funktion

$$f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Riemann-integrierbar ist.

Lösung

Die stetige Funktion f ist auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ beschränkt nach Korollar 13.10. Daher gibt es obere und untere Treppenfunktionen und daher existieren Oberintegral und Unterintegral. Wir müssen zeigen, dass sie übereinstimmen. Dazu genügt es, zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ eine untere und eine obere Treppenfunktion für f anzugeben derart, dass die Differenz ihrer Treppenintegrale $\leq \epsilon$ ist. Nach Lemma 14.2 ist f gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu $\epsilon' = \frac{\epsilon}{b-a}$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x, x' \in I$ mit $d(x, x') \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon'$ gilt. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{b-a}{n} \leq \delta$ ist, und betrachten wir die Unterteilung des Intervalls mit den Punkten $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Auf den Teilintervallen $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \ldots, n$, ist der Abstand zwischen dem Maximum

$$t_i = \max\left(f(x), a_{i-1} \leq x \leq a_i\right)$$

und dem Minimum

$$s_i = \min\left(f(x), a_{i-1} \leq x \leq a_i\right)$$

kleiner/gleich ϵ'. Die zu diesen Werten gehörigen Treppenfunktionen, also

$$t(x) := \begin{cases} t_i \text{ für } x \in [a_{i-1}, a_i[\text{ und } 1 \leq i \leq n-1\,, \\ t_n \text{ für } x \in [a_{n-1}, a_n]\,, \end{cases}$$

und

$$s(x) := \begin{cases} s_i \text{ für } x \in [a_{i-1}, a_i[\text{ und } 1 \leq i \leq n-1\,, \\ s_n \text{ für } x \in [a_{n-1}, a_n]\,, \end{cases}$$

sind dann eine obere bzw. untere Treppenfunktion zu f. Die Differenz zwischen den zugehörigen Ober- und Untersummen ist dann

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n} s_i \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n} (t_i - s_i) \frac{b-a}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} \epsilon' \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{n} = \epsilon.$$