

Einführung in die mathematische Logik

Vorlesung 2

Sprache als Symbolketten

Wir knüpfen an die Überlegungen der ersten Vorlesung an, ob es eine Maschine (einen Computer, einen Algorithmus) gibt, (alle korrekten) mathematische Aussagen ausdrücken, ausdrucken, überprüfen, beweisen oder widerlegen kann. Eine solche Maschine operiert mit Zeichenreihen, die wir in diesem Zusammenhang Wörter einer (formalen) Sprache nennen.

DEFINITION 2.1. Es sei A eine Menge von Symbolen. Dann nennt man jede endliche Zeichenreihe, die man mit den Elementen aus A aufstellen kann, ein *Wort über dem Alphabet A* .

Die Menge aller Wörter über dem Alphabet A bezeichnen wir mit A^* .

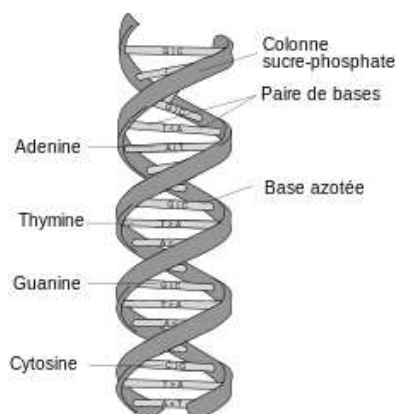
Das zugrunde liegende Alphabet kann endlich oder unendlich sein, für praktische Anwendungen reicht ein endliches Alphabet. Die Elemente des Alphabets nennt man Buchstaben, Zeichen oder Symbole. Mit einer Zeichenreihe meint man eine hintereinander geschriebene Buchstabenkette (oder Symbolkette). Dazu gehören die einelementigen Ketten, also die Elemente aus A selbst, aber auch die leere Kette (das leere Wort), die wir mit \emptyset bezeichnen. Bei dieser Definition kommt es nicht auf irgendeine Sinnhaftigkeit der Wörter an, es handelt sich um eine rein formale Definition.

BEISPIEL 2.2. Es sei ein einelementiges Alphabet $A = \{| \}$ gegeben. Dann besitzt jedes Wort die Gestalt

$$| \dots |$$

mit einer gewissen Anzahl von Strichen. Zwei solche Wörter sind genau dann gleich, wenn ihre Strichanzahl übereinstimmt. In diesem Fall entsprechen also die Wörter den natürlichen Zahlen (das leere Wort entspricht der 0).

BEISPIEL 2.3. Die DNA-Stränge, die die Erbinformationen aller Lebewesen tragen, sind Doppelketten in Helixform aus Nukleotiden. Die entscheidenden Bestandteile der Nukleotiden sind die Basen, wofür es nur vier Möglichkeiten gibt, nämlich Adenin (A), Thymin (T), Guanin (G) und Cytosin (C). Die Nukleotiden treten in der Helix stets mit einem festen Partner (nämlich Adenin mit Thymin und Guanin mit Cytosin) auf, so dass die Struktur durch die eine Hälfte der Helix festgelegt ist. Daher entspricht die genetische Information eines DNA-Stranges einem Wort über dem Alphabet mit den Buchstaben A,T,G,C.



Wenn zu einem Alphabet A ein neues Zeichen $-$ als „Leerzeichen“ hinzugenommen wird, so werden manchmal die Wörter aus A als (eigentliche) Wörter und die Wörter aus dem Alphabet $A \cup \{-\}$ als Texte (oder Sätze) bezeichnet. Mit der Hinzunahme eines weiteren Satzbeendigungssymbols kann man auch zwischen Sätzen und Texten unterscheiden.

Die geschriebene natürliche Sprache umfasst das Alphabet, das aus den Großbuchstaben $A, B, C, \dots, Z, \text{Ä}, \text{Ö}, \text{Ü}$, den Kleinbuchstaben $a, b, c, \dots, z, \text{ä}, \text{ö}, \text{ü}, \text{ß}$, den Ziffern, den Satzzeichen und einem Leerzeichen für den Abstand zwischen den Wörtern besteht. Jede lineare Hintereinanderreihung dieser Zeichen gilt für uns als Text. Im Moment interessieren wir uns nicht dafür, ob die geschriebenen Texte syntaktisch richtig gebildet oder semantisch sinnvoll sind. Im Moment ist also z.B.

!!fL33kAs.,r

ein erlaubter Text.

In der Definition von einem Wort über einem Alphabet haben wir von einer Menge gesprochen und somit eine naive Mengenlehre vorausgesetzt. Im endlichen Fall wird die Symbolmenge einfach durch Auflisten ihrer Elemente gegeben. Für die gebildeten Wörter haben wir implizit verwendet, dass das Bilden von linearen Zeichenreihen unproblematisch ist.

Rekursive Definitionen

Ein wichtiges Prinzip, Mengen zu definieren, ist das der *rekursiven Definition*. Eine rekursive Definition besteht aus zwei Sorten von Regeln. (1) Einerseits gewisse Startregeln, die sagen, was direkt zu der Menge gehört, und (2) Rekursionsregeln, die die Form einer Bedingung haben, und besagen, dass wenn gewisse Objekte zu der Menge gehören, und wenn neue Objekte aus diesen Objekten in bestimmter Weise gebildet sind, dass dann diese neuen Objekte

ebenfalls dazu gehören (die dritte stillschweigende Bedingung an eine rekursive Definition ist, dass es keine weitere Möglichkeit gibt, zu der Menge zu gehören, außer den in (1) und (2) genannten).

Die Menge der Wörter über einem Alphabet A kann man auch folgendermaßen rekursiv definieren.

- (1) \emptyset ist ein Wort über A .
- (2) Wenn x ein Wort ist und $a \in A$ ein Buchstabe, so ist auch xa ein Wort.

Hier repräsentiert x (eine Variable) ein beliebiges schon konstruiertes Wort. Dabei ist $\emptyset a$ als a zu lesen, so dass die beiden erlaubten Konstruktionsschritte (also der Anfangsschritt und der Rekursionsschritt) sichern, dass die einzelnen Symbole aus A Wörter sind. Wenn das Alphabet durch $A = \{a, b, c\}$ gegeben ist, so würde der rekursive Nachweis, dass $abbac$ ein Wort ist, folgendermaßen gehen.

- (1) Wegen der Anfangsbedingung ist \emptyset ein Wort.
- (2) Deshalb und wegen des Rekursionsschrittes ist $\emptyset a = a$ ein Wort.
- (3) Deshalb und wegen des Rekursionsschrittes ist ab ein Wort (hier ist also $x = a$ das schon nachgewiesene Wort und der Buchstabe b wird angehängt).
- (4) Deshalb und wegen des Rekursionsschrittes ist abb ein Wort (hier ist also $x = ab$ das schon nachgewiesene Wort und der Buchstabe b wird angehängt).
- (5) Deshalb und wegen des Rekursionsschrittes ist $abba$ ein Wort (hier ist also $x = abb$ das schon nachgewiesene Wort und der Buchstabe a wird angehängt).
- (6) Deshalb und wegen des Rekursionsschrittes ist $abbac$ ein Wort (hier ist also $x = abba$ das schon nachgewiesene Wort und der Buchstabe c wird angehängt).

Natürlich kann man $abbac$ sofort ansehen, dass es sich um eine linear angeordnete Zeichenreihe über $\{a, b, c\}$ handelt, und der rekursive Nachweis scheint übertrieben pedantisch zu sein. Bei komplexer gebildeten Mengen ist aber die rekursive Definition unerlässlich, vor allem auch deshalb, da sie ermöglicht, Eigenschaften der Elemente einer Menge über den rekursiven Aufbau nachzuweisen.

Eine Sprache besteht aus sinnvollen Wörtern und sinnvollen Sätzen, nicht aus der beliebigen Aneinanderreihung von Symbolen oder Buchstaben (oder Lauten). Es ist aber vorteilhaft, erstmal alle Möglichkeiten zuzulassen und daraus durch eine Vorgabe von Regeln die sinnvollen Ausdrücke, Wörter, Lautkombinationen herauszufiltern. So funktioniert auch der kleinkindliche Spracherwerb und der Aufbau der formalen Sprachen. Wir werden nun den rekursiven Aufbau von syntaktisch korrekten Aussagen besprechen.

Aussagenlogik

Die mathematische Logik beschäftigt sich hauptsächlich mit Prädikatenlogik, da in dieser ein Großteil der Mathematik beschrieben werden kann. Als Vorstufe dazu behandeln wir jetzt die Aussagenlogik. Wie bei der Prädikatenlogik später folgen wir dem Schema

Formale Sprache - Interpretationen und semantische Tautologien - Syntaktische Tautologien und Ableitungskalkül - Vollständigkeit.

Die Sprache der Aussagenlogik

Die formallogische Sprache der Aussagenlogik wird ausgehend von einer Variablenmenge V und einer einfachen Menge an Junktoren induktiv gebaut. Die Aussagenvariablen werden wir mit p, q, p_n etc. bezeichnen. Sie repräsentieren Aussagen, haben aber keinen eigenen Inhalt, sondern teilen mit Aussagen lediglich gewisse syntaktische Eigenschaften (semantische Eigenschaften werden hier noch nicht besprochen). Beispiele für solche syntaktischen Eigenschaften sind, dass man zu einer Aussage eine Negation bilden kann, oder dass man zwei Aussagen durch „und“ verknüpfen kann. Die Aussagenvariablen repräsentieren Grundaussagen, die durch solche Verknüpfungen zu komplexeren Aussagen zusammengesetzt werden können, die selbst wiederum zu weiter verschachtelten Aussagen verbunden werden können. Die folgende Definition fixiert die formale Sprache der Aussagenlogik; es handelt sich um eine rekursive Definition, wobei die Aussagenvariablen die Startelemente sind und die logischen Operationen als Generierungsregeln auftreten. Das dieser induktiven Definition zugrunde liegende Alphabet besteht neben den Aussagenvariablen aus den Symbolen

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,),$$

die als

nicht, und, oder, impliziert, genau dann, wenn, Klammer auf, Klammer zu gelesen werden. Die Bezeichnungen orientieren sich natürlich an den später einzuführenden Bedeutungen, im Moment sind es lediglich Wörter für bestimmte Symbole.

DEFINITION 2.4. Es sei V eine Menge (deren Elemente wir als Aussagenvariablen bezeichnen). Dann wird die zugehörige *Sprache der Aussagenlogik* L^V (zu V) induktiv durch folgende Regeln definiert.

- (1) Jedes $p \in V$ gehört zu L^V .
- (2) Wenn $\alpha \in L^V$, so ist auch $\neg(\alpha) \in L^V$.
- (3) Wenn $\alpha, \beta \in L^V$, so sind auch $(\alpha) \wedge (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$, $(\alpha) \rightarrow (\beta)$, $(\alpha) \leftrightarrow (\beta) \in L^V$.

Häufig verwendet man weniger Symbole, beispielsweise verzichtet man auf $\rightarrow, \leftrightarrow$. Die Klammerungen werden oft auch anders gesetzt. Z.B. erlaubt man manchmal $\neg\alpha$ (ohne Klammer) oder man macht die Klammern außen, also $(\alpha \wedge \beta)$. Sehr oft lässt man Klammern, um die Lesbarkeit der Aussagen zu erhöhen, einfach weg, obwohl dies vom syntaktischen Standpunkt aus ein schweres Vergehen ist.

BEISPIEL 2.5. Es seien p, q, r Aussagevariablen. Dann sind beispielsweise

$$p, \neg(p), \neg(\neg(\neg(p))), (p) \wedge (\neg(q)), ((p) \wedge (\neg(q))) \wedge (\neg(r)), \\ (((\neg(\neg(p))) \rightarrow (\neg(q))) \vee ((\neg(r))) \leftrightarrow (\neg(r)) \wedge (q))$$

korrekt gebildete Aussagen, d.h. sie gehören zu L^V . Dagegen sind

$$\neg, \rightarrow, p \wedge, p \wedge q, (p) \wedge (\neg q), (p) \wedge (q) \wedge (r),$$

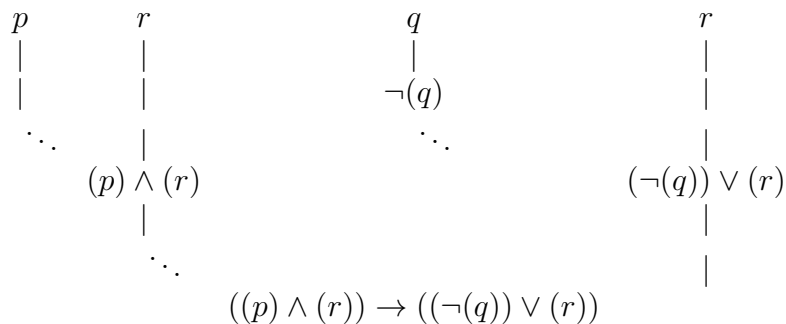
keine Aussagen in L^V (aber natürlich Wörter über dem gegebenen Alphabet).

Der Nachweis, dass ein gegebenes Wort eine korrekt gebildete Aussage ist, erfolgt über einen Aussagestammbaum. Dieser beginnt mit den verwendeten Aussagevariablen und erzeugt dann Schritt für Schritt die beteiligten Teilaussagen, bis schließlich die in Frage stehende Aussage erzeugt ist.

BEISPIEL 2.6. Wir wollen uns anhand eines Stammbaumes klar machen, dass die Zeichenkette

$$((p) \wedge (r)) \rightarrow ((\neg(q)) \vee (r))$$

eine Aussage ist, also gemäß den Regeln korrekt gebildet ist. Der Abstammungsbaum entsteht ausgehend von den Blättern, die die vorkommenden Aussagevariablen (mit ihrer Häufigkeit) repräsentieren, indem man Schritt für Schritt komplexere Teilaussagen zusammensetzt.



Aussagenlogische Interpretationen

DEFINITION 2.7. Es sei V eine Menge von Variablen und L^V die zugehörige aussagenlogische Sprache. Unter einer *Wahrheitsbelegung* versteht man eine Abbildung

$$\lambda: V \longrightarrow \{0, 1\}$$

(oder mit $\{f, w\}$ als Wertebereich).

Eine Wahrheitsbelegung ist als einfach dadurch gegeben, dass einer jeden Aussagevariablen ein Wahrheitswert, nämlich 0 oder 1 bzw. f oder w zugeordnet wird. Eine solche Wahrheitsbelegung möchte man auf die gesamte Sprache fortsetzen, wobei die folgenden Festlegungen die inhaltliche Bedeutungen der Junktoren widerspiegeln.

DEFINITION 2.8. Es sei V eine Menge von Variablen, L^V die zugehörige aussagenlogische Sprache und

$$\lambda: V \longrightarrow \{0, 1\}$$

eine Wahrheitsbelegung. Unter der zugehörigen *Interpretation* I versteht man die über den induktiven Aufbau der Sprache festgelegte Abbildung

$$I: L^V \longrightarrow \{0, 1\}$$

mit

- (1) $I(v) = \lambda(v)$ für jede Aussagevariable $v \in V$.
- (2) Bei $\alpha = \neg\beta$ ist

$$I(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I(\beta) = 0, \\ 0, & \text{falls } I(\beta) = 1. \end{cases}$$

- (3) Bei $\alpha = \beta \wedge \gamma$ ist

$$I(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I(\beta) = I(\gamma) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (4) Bei $\alpha = \beta \vee \gamma$ ist

$$I(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I(\beta) = 1 \text{ oder } I(\gamma) = 1, \\ 0, & \text{falls } I(\beta) = I(\gamma) = 0. \end{cases}$$

- (5) Bei $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ ist

$$I(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I(\beta) = 0 \text{ oder } I(\gamma) = 1, \\ 0, & \text{falls } I(\beta) = 1 \text{ und } I(\gamma) = 0. \end{cases}$$

Bei

$$I(\alpha) = 1$$

sagt man, dass der Ausdruck α bei der Wahrheitsbelegung λ (oder der Interpretation I) wahr wird, andernfalls, dass er falsch wird. Dafür schreibt man auch $I \models \alpha$. Wenn $\Gamma \subseteq L^V$ eine Menge an Ausdrücken ist, so bedeutet $I \models \Gamma$, dass $I \models \alpha$ für alle $\alpha \in \Gamma$ gilt. Dafür sagt man auch, dass Γ bei der Interpretation I gilt oder dass I ein *Modell* für Γ ist.

BEISPIEL 2.9. Es sei $V = \{p, q, r\}$ und λ sei die Wahrheitsbelegung mit $\lambda(p) = 1$, $\lambda(q) = 1$, $\lambda(r) = 0$. Es sei I die zugehörige Interpretation. Zur Berechnung des Wahrheitswertes von

$$\alpha = \neg(p \wedge \neg q) \rightarrow r$$

unter dieser Interpretation muss man rekursiv gemäß Definition 3.2 die einzelnen Bestandteile auswerten. Es ist

$$I(\neg q) = 0$$

und somit

$$I(p \wedge \neg q) = 0.$$

Also ist

$$I(\neg(p \wedge \neg q)) = 1.$$

Andererseits ist

$$I(r) = 0$$

und daher ist

$$I(\alpha) = 0.$$

Der Ausdruck ist also bei dieser Wahrheitsbelegung nicht wahr.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = DNA structure and bases FR.svg , Autor = Benutzer Dosto
auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5

2