

Algebraische Kurven**Arbeitsblatt 1****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 1.1. Skizziere im \mathbb{R}^2 die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

- (1) $x^2 - y^2 - 1 = 0$,
- (2) $x^2 + xy + y^2 = 0$,
- (3) $x^2 + y^2 + 1 = 0$,
- (4) $x^2 + y^2 = 0$,
- (5) $x^2 + y^3 = 0$,
- (6) $x^3 - y^5 = 0$,
- (7) $x^2 - x^3 = 0$,
- (8) $x^3 + y^3 = 1$,
- (9) $x^4 + y^4 = 1$,
- (10) $-5 + 3x + 4x^2 + x^3 - y^2 = 1$.

AUFGABE 1.2. Berechne den Durchschnitt der Kurven aus Aufgabe 1.1 mit den folgenden Geraden.

- (1) $x = 0$,
- (2) $y = 0$,
- (3) $x = 1$,
- (4) $y = -2$,
- (5) $x = y$,
- (6) $x = -y$,
- (7) $2x - 3y + 4 = 0$.

AUFGABE 1.3. Multipliziere in $\mathbb{Z}[x, y, z]$ die beiden Polynome

$$x^5 + 3x^2y^2 - xyz^3 \text{ und } 2x^3yz + z^2 + 5xy^2z - x^2y.$$

AUFGABE 1.4. Multipliziere in $\mathbb{Z}/(5)[x, y]$ die beiden Polynome

$$x^4 + 2x^2y^2 - xy^3 + 2y^3 \text{ und } x^4y + 4x^2y + 3xy^2 - x^2y^2 + 2y^2.$$

AUFGABE 1.5. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass K nicht endlich sein kann.

AUFGABE 1.6. Diskutiere den Zusammenhang zwischen ebenen algebraischen Kurven und dem Satz über implizite Funktionen.

AUFGABE 1.7. Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^2$ das Bild unter der polynomialen Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^3 - 1, t^2 - 1).$$

Bestimme ein Polynom $F \neq 0$ in zwei Variablen derart, dass C auf dem Nullstellengebilde zu F liegt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 1.8.* (3 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R . Zeige, dass die Einheiten von $R[X]$ genau die Einheiten von R sind.

AUFGABE 1.9. (4 Punkte)

Betrachte Gleichungen der Form

$$y^2 = G(x) \text{ mit } G(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

über \mathbb{R} . Skizziere die verschiedenen Lösungsmengen für die Koeffizienten $a, b, c \in \{1, -1, 0\}$.

AUFGABE 1.10. (3 Punkte)

Führen Sie in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ folgende Polynomdivision aus.

$$X^4 + 5X^2 + 3 \text{ durch } 2X^2 + X + 6.$$

AUFGABE 1.11. (3 Punkte)

Bestimme im Polynomring $\mathbb{Z}/(3)[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad 4.

AUFGABE 1.12.* (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Zeige, dass die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

- (1) K ist algebraisch abgeschlossen.
- (2) Jedes nicht-konstante Polynom $F \in K[X]$ zerfällt in Linearfaktoren.

AUFGABE 1.13. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

für die Körper $K = \mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(5)$ und $\mathbb{Z}/(11)$.

AUFGABE 1.14. (5 Punkte)

Es sei $C \subseteq \mathbb{C}^2$ das Bild unter der polynomialen Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2, t \longmapsto (t^3 - t^2 + 4t + 3, -t^2 + 5t - 1).$$

Bestimme ein Polynom $F \neq 0$ in zwei Variablen derart, dass C auf dem Nullstellengebilde zu F liegt.

AUFGABE 1.15. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2,$$

die einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den eindeutigen Schnittpunkt $\neq (0, -1)$ der durch die beiden Punkte $(t, 1)$ und $(0, -1)$ gegebenen Geraden G_t mit dem Einheitskreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

zuordnet. Zeige, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und bestimme die funktionalen Ausdrücke, die diese Abbildung beschreiben. Zeige, dass f differenzierbar ist. Ist f injektiv, ist f surjektiv?