Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 52

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 52.1. Finde für die folgenden Kurven

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von γ genau die Faser von φ über 0 ist.

(1) $\gamma(t) = (t, t^3)$.
(2) $\gamma(t) = (t^3, t^3 + 1)$.
(3) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Aufgabe 52.2. Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetige Abbildung und $F \subseteq \mathbb{R}^n$ die Faser über $P \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass es auch eine stetige Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt derart, dass F die Faser von ψ über einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 52.3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

in einen weiteren reellen endlichdimensionalen Vektorraum W gibt derart, dass U die Faser über $0 \in W$ ist und dass φ in jedem Punkt $v \in V$ regulär ist.

Aufgabe 52.4. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung, die im Punkt $P \in G$ ein surjektives totales Differential besitze. Es sei

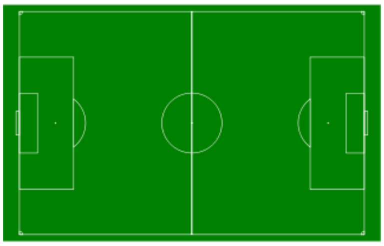
$$\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(mit $U \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ offen) ein lokaler Diffeomorphismus auf die Faser durch P, bei dem $Q \in U$ auf P abgebildet wird. Zeige, dass man den Tangentialraum an die Faser durch P auch als

$$\{P + (D\psi)_Q(u) | \, u \in \mathbb{R}^{n-m}\}$$

beschreiben kann.

Aufgabe 52.5. Ein Fußballfeld soll in einen Park mit Erhebungen und mit Senken umgewandelt werden. Dabei sollen die Linien unverändert bleiben und alle anderen Punkte sollen ihre Höhe ändern. Ist dabei jede Vorgabe, welche umrandeten Gebiete erhöht oder gesenkt werden sollen, möglich? Ist jedes solche Vorhaben durch eine stetige oder eine differenzierbare Höhenfunktion durchführbar? Können im differenzierbaren Fall alle Punkte regulär sein?



Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 52.6. (4 Punkte)

Bestimme den Tangentialraum an die Faser im Punkt $(2, -1, 3)$ der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x, y, z) \longmapsto (x^2 e^z - y^3, \frac{x}{e^{yz}}),$$

und zwar sowohl durch lineare Gleichungen als auch durch eine parametrisierte Gerade.

Aufgabe 52.7. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x, y) \longmapsto (x, xy).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern, das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung. Man gebe möglichst große offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ derart an, dass

$$\varphi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 52.8. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (xy, yz).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern, das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung.

Aufgabe 52.9. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 \cdot \sin y \, - y \cdot \cos (xy)\,.$$

Zeige, dass die Faser durch den Punkt $P = (2,3)$ sich lokal durch eine differenzierbare Kurve

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \gamma(t),$$

mit $\gamma(0) = P$ parametrisieren lässt, und bestimme die möglichen Werte der Ableitung $\gamma'(0)$.

Aufgabe 52.10. (4 Punkte)

Es seien

$$\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Abbildungen und seien F_1 und F_2 Fasern dieser Abbildungen, d.h. es sei $F_1 = \varphi_1^{-1}(b_1)$ und $F_2 = \varphi_2^{-1}(b_2)$ (für gewisse $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$). Zeige, dass es eine stetige Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ein $a \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass $F_1 \cup F_2 = \varphi^{-1}(a)$ ist.

Aufgabe 52.11. (4 Punkte)

Man gebe explizit eine stetige Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

derart, dass die Faser von φ über 0 gleich $I = \{(x,0) |\, x \in [0,1]\}$ ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Soccer field - empty.svg, Autor = Benutzer Nuno Tavares auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 2