

## Invariantentheorie

### Vorlesung 18

In dieser Vorlesung machen wir uns klar, dass das Spektrum einer Hopf-Algebra eine Struktur aufweist, die ähnlich zu einer Gruppe ist, und wir erklären, wie Gruppenoperationen mit Hopfalgebren beschrieben werden können.

### Affine Gruppenschemata

DEFINITION 18.1. Es sei  $K$  ein kommutativer Ring und  $H$  eine kommutative  $K$ -Hopf-Algebra. Dann nennt man das Spektrum  $G = \text{Spek}(H)$  zusammen mit den induzierten  $K$ -Morphismen

$$\Delta^*: G \times_K G \longrightarrow G,$$

$$\epsilon^*: \text{Spek}(K) \longrightarrow G$$

und

$$S^*: G \longrightarrow G$$

das zugehörige *affine Gruppenschema*.

Die Gruppenschemata sind im Allgemeinen keine Gruppen im eigentlichen Sinne, allein schon weil die Primideale, also die Punkte, unterschiedliche Höhe und unterschiedliche Restklassenkörper besitzen. Solche Primideale können nicht sinnvoll miteinander verknüpft werden. Wir werden gleich sehen, dass Punkte, deren Restklassenkörper zusammenpassen, miteinander verknüpft werden können.

LEMMA 18.2. *Es sei  $K$  ein kommutativer Ring,  $H$  eine kommutative Hopf-Algebra und  $G = \text{Spek}(H)$  das zugehörige affine Gruppenschema. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die folgenden Diagramme von  $K$ -Morphismen kommutieren:*

$$\begin{array}{ccc} G \times_K G \times_K G & \xrightarrow{\Delta^* \times \text{Id}_G} & G \times_K G \\ \text{Id}_G \times \Delta^* \downarrow & & \downarrow \Delta^* \\ G \times_K G & \xrightarrow{\Delta^*} & G \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{Id} \times (\epsilon^* \iota^*)} & G \times_K G \\ \text{Id}_G \searrow & & \downarrow \Delta^* \\ & & G \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{S^* \times \text{Id}_G} & G \times_K G \\
\iota^* \downarrow & & \downarrow \Delta^* \\
\text{Spek}(K) & \xrightarrow{\epsilon^*} & G
\end{array}$$

(2) Für jede kommutative  $K$ -Algebra  $L$  ist  $G(L)$  mit den induzierten Operationen eine Gruppe.

*Beweis.* (1) folgt unmittelbar aus der Kommutativität der entsprechenden Diagramme für die Hopf-Algebra. (2) folgt aus (1) und aus

$$\begin{aligned}
(G \times_K G)(L) &= \text{Hom}_K^{\text{alg}}(H \otimes_K H, L) \\
&= \text{Hom}_K^{\text{alg}}(H, L) \times \text{Hom}_K^{\text{alg}}(H, L) \\
&= G(L) \times G(L),
\end{aligned}$$

wobei die mittlere Gleichung auf Satz 17.5 beruht.  $\square$

Die vorstehende Aussage erklärt auch teilweise die Bezeichnung Gruppenschema. Einem Gruppenschema ist nicht nur eine Gruppe zugeordnet, sondern gleich eine ganze Familie von Gruppen. Das affine Schema legt dabei die algebraische Struktur der Gruppenverknüpfung fest, während die Anzahl der Elemente in der Gruppe vom gewählten Grundring  $K$  abhängt. Wir erläutern das Konzept der  $K$ -Punkte an einigen Hopf-Algebren.

BEISPIEL 18.3. Es sei  $(G, 1, \cdot)$  eine endliche Gruppe und  $K$  ein Körper. Die gemäß Beispiel 17.8 zugehörige Hopf-Algebra ist einfach  $H = \text{Abb}(G, K)$ , also das  $\#(G)$ -fache direkte Produkt von  $K$  mit sich selbst. Ein  $K$ -Algebrahomomorphismus

$$\varphi: \text{Abb}(G, K) \longrightarrow K$$

muss (wegen  $e_\sigma \cdot e_\tau = 0$  für  $\sigma \neq \tau$ ) eine Projektion auf eine Komponente sein. D.h.  $\varphi$  muss die Auswertung von  $f \in \text{Abb}(G, K)$  an einem Gruppenelement  $\sigma \in G$  sein. Daher ist

$$K\text{-Spek}(\text{Abb}(G, K)) = G.$$

Darüber hinaus ist

$$\text{Spek}(\text{Abb}(G, K)) = K\text{-Spek}(\text{Abb}(G, K)).$$

Wir identifizieren also Gruppenelemente, Primideale von  $\text{Abb}(G, K)$  und ihre zugehörigen  $K$ -Algebrahomomorphismen (ein Gruppenelement  $\sigma \in G$  entspricht die Projektion  $p_\sigma$  auf die  $\sigma$ -Komponente und ihr Kern). Ebenso ist

$$G \times G = K\text{-Spek}(H) \times_K K\text{-Spek}(H) = K\text{-Spek}(H \otimes_K H).$$

Ein Paar  $(\sigma, \tau) \in G \times G$  entspricht dabei dem  $K$ -Algebrahomomorphismus

$$H \otimes_K H \longrightarrow K, f_1 \otimes f_2 \longmapsto \sigma(f_1) \cdot \tau(f_2).$$

Die durch die Hopf-Algebrastruktur induzierte Multiplikation  $\mu$  auf  $G$  von  $\sigma$  und  $\tau$ , angewendet auf  $e_\rho$ , ist

$$\begin{aligned}\mu(\sigma, \tau)(e_\rho) &= ((\sigma \otimes \tau) \circ \Delta)(e_\rho) \\ &= (\sigma \otimes \tau) \left( \sum_{\rho_1 \cdot \rho_2 = \rho} e_{\rho_1} \otimes e_{\rho_2} \right) \\ &= \sum_{\rho_1 \cdot \rho_2 = \rho} \sigma(e_{\rho_1}) \cdot \tau(e_{\rho_2}).\end{aligned}$$

Die Summanden sind nur dann gleich 1 (andernfalls sind sie 0), wenn  $\rho_1 = \sigma$  und  $\rho_2 = \tau$  ist. Daher ist die Summe nur im Fall

$$\rho = \sigma\tau$$

gleich 1 und sonst gleich 0. Dies bedeutet wiederum

$$\mu(\sigma, \tau) = \sigma\tau,$$

da ja  $\sigma\tau$  ebenfalls genau an  $e_{\sigma\tau}$  den Wert 1 und sonst überall den Wert 0 besitzt und die  $K$ -Algebrahomomorphismen von  $H$  nach  $K$  auf der Basis festgelegt sind. Also stimmt die durch die Hopf-Struktur gegebene Multiplikation mit der vorgegebenen Multiplikation überein. Das gleiche gilt für das neutrale Element und die Inversen. Insgesamt gewinnt man also die endliche Gruppe als affines Gruppenschema zur Hopf-Algebra zurück.

**BEISPIEL 18.4.** Es sei  $K$  ein kommutativer Ring und  $H = K[X]$  der Polynomring versehen mit der in Beispiel 17.9 eingeführten (additiven)  $K$ -Hopf-Algebrastruktur. Zu einer kommutativen  $K$ -Algebra  $L$  haben wir die natürliche Bijektion

$$L \longrightarrow \text{Hom}_K^{\text{alg}}(H, L),$$

wobei ein Element  $a \in L$  auf den  $K$ -Algebrahomomorphismus abgebildet wird, der durch  $X \mapsto a$  festgelegt ist. Unter dieser Bijektion wird die durch die Hopf-Struktur induzierte Verknüpfung zur Addition auf  $L$ , siehe Aufgabe 18.1. Daher nennt man  $\text{Spek}(K[X])$  auch die *additive Gruppe* über  $K$ .

**BEISPIEL 18.5.** Es sei  $K$  ein kommutativer Ring und  $H = K[X, X^{-1}] = K[X]_X$  sei mit der in Beispiel 17.10 eingeführten (multiplikativen)  $K$ -Hopf-Algebrastruktur versehen. Zu einer kommutativen  $K$ -Algebra  $L$  haben wir die natürliche Bijektion

$$L^\times \longrightarrow \text{Hom}_K^{\text{alg}}(H, L),$$

wobei eine Einheit  $a \in L^\times$  auf den  $K$ -Algebrahomomorphismus abgebildet wird, der durch  $X \mapsto a$  festgelegt ist. Da  $a$  eine Einheit ist, ist dies auf genau eine Weise möglich. Unter dieser Bijektion wird die durch die Hopf-Struktur induzierte Verknüpfung zur Multiplikation auf  $L^\times$ , siehe Aufgabe 18.6. Daher nennt man  $\text{Spek}(K[X, X^{-1}])$  auch die *multiplikative Gruppe* über  $K$ .

BEISPIEL 18.6. Es sei  $K$  ein kommutativer Ring und  $n \in \mathbb{N}$ . Wir möchten eine Hopf-Algebra konstruieren, derart, dass die Menge ihrer  $K$ -Punkte mit der induzierten Gruppenstruktur gleich der Gruppe der invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen  $\mathrm{GL}_n(K)$  über  $K$  ist. Eine solche Matrix besteht aus  $n^2$  Einträgen, von daher betrachten wir zunächst den Polynomring

$$K[X_{ij}, 1 \leq i, j \leq n].$$

Einen  $K$ -Punkt dieses Ringes, also eine Belegung der Variablen, fassen wir als eine Matrix auf. Die Bedingung, dass die Matrix invertierbar ist, kann man über die Determinante ausdrücken, und zwar muss diese eine Einheit in  $K$  sein. Eine Belegung der Variablen, die einer invertierbaren Matrix entspricht, muss also aufgrund der universellen Eigenschaft der Nenneraufnahme durch

$$H = K[X_{ij}, 1 \leq i, j \leq n]_D$$

faktorisieren, wobei  $D$  die Determinante in den Variablen  $X_{ij}$  bezeichnet.

Wir erklären auf  $H$  eine Hopf-Algebrastruktur, wobei wir uns von der Gruppenstruktur auf der allgemeinen linearen Gruppe leiten lassen. Die Komultiplikation wird durch

$$H \longrightarrow H \otimes_K H, X_{ij} \longmapsto \sum_{k=1}^n Y_{ik} \otimes Z_{kj},$$

definiert. Die Koeinheit wird durch

$$\epsilon(X_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

festgelegt, das Koinverse wird mit Hilfe der Formel

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \mathrm{Adj} M$$

erstellt, wobei die adjungierte Matrix ein Polynom in den Einträgen der Matrix ist. Das Koinverse bildet demnach  $X_{ij}$  auf den  $(i, j)$ -ten Eintrag in der rechten Seite der obigen Formel ab.

Gernerell gilt, dass man eine Gruppe, die man allein mit algebraischen (polynomialen) Ausdrücken hinschreiben kann, auch durch eine Hopf-Algebra gewinnen kann.

BEISPIEL 18.7. Die spezielle lineare Gruppe wird als Hopf-Algebra durch

$$H = K[X_{ij}, 1 \leq i, j \leq n]/(D - 1)$$

festgelegt, wobei  $D$  die Determinante in den Variablen  $X_{ij}$  bezeichnet. Die Komultiplikation, die Koeinheit und das Koinverse sind wie in Beispiel 18.6 zu wählen.

## Operationen von affinen Gruppenschemata

Wir wollen nun auch Gruppenoperationen mit Hopf-Algebren ausdrücken. Dabei wird die Menge, auf der operiert wird, ein Spektrum eines kommutativen Ringes sein. Um die Operation richtig algebraisieren zu können, übersetzen wir die Axiome einer Gruppenoperation in die Sprache der kommutativen Diagramme. Eine Gruppenoperation einer Gruppe  $G$  auf einer Menge  $X$  liegt genau dann vor, wenn die Diagramme (es sei  $\mu$  die Verknüpfung auf der Gruppe und  $\nu$  die Operationsabbildung)

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{\mu \times \text{Id}_X} & G \times X \\ \text{Id}_G \times \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\ G \times X & \xrightarrow{\nu} & X \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e \times \text{Id}_X} & G \times X \\ \text{Id}_X \searrow & & \downarrow \nu \\ & & X \end{array}$$

kommutieren.

DEFINITION 18.8. Es sei  $K$  ein kommutativer Ring,  $H$  eine kommutative  $K$ -Hopf-Algebra und  $R$  eine kommutative  $K$ -Algebra. Unter einer *Kooperation* von  $H$  auf  $R$  versteht man einen  $K$ -Algebrahomomorphismus

$$N: R \longrightarrow H \otimes_K R$$

derart, dass die beiden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{N} & H \otimes_K R \\ N \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes \text{Id}_R \\ H \otimes_K R & \xrightarrow{\text{Id}_H \otimes N} & H \otimes_K H \otimes_K R \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{N} & H \otimes_K R \\ \cong \searrow & & \downarrow \epsilon \otimes \text{Id}_R \\ & & K \otimes_K R \end{array}$$

kommutieren.

DEFINITION 18.9. Es sei  $K$  ein kommutativer Ring,  $H$  eine kommutative  $K$ -Hopf-Algebra und  $G = \text{Spek}(H)$  das zugehörige affine Gruppenschema. Es sei

$$N: R \longrightarrow H \otimes_K R$$

eine Kooperation von  $H$  auf einem kommutativen Ring  $R$  mit dem Spektrum  $X = \text{Spek}(R)$ . Dann nennt man den zu  $N$  gehörenden  $K$ -Morphismus

$$N^*: G \times_K X = \text{Spek}(H \otimes_K R) \longrightarrow X$$

eine ( $K$ -rationale) *Operation des affinen Gruppenschemas*  $G$  auf  $X$ .

LEMMA 18.10. *Es sei  $K$  ein kommutativer Ring,  $H$  eine kommutative Hopf-Algebra und  $G = \text{Spek}(H)$  das zugehörige affine Gruppenschema. Es sei  $R$  eine weitere kommutative  $K$ -Algebra, auf der eine Kooperation von  $H$  und damit eine Operation von  $G$  auf  $X = \text{Spec } R$  vorliege. Dann gelten folgende Aussagen (dabei ist  $\mu = \Delta^*$ ,  $\nu = N^*$  und  $j^*$  bezeichnet den Strukturmorphismus  $X \rightarrow \text{Spek}(K)$ ).*

(1) *Die folgenden Diagramme von  $K$ -Morphismen kommutieren:*

$$\begin{array}{ccc} G \times_K G \times_K X & \xrightarrow{\mu \times \text{Id}_X} & G \times_K X \\ \text{Id}_G \times \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\ G \times_K X & \xrightarrow{\nu} & X \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\epsilon^* j^*) \times \text{Id}_X} & G \times_K X \\ \text{Id}_X \searrow & & \downarrow \nu \\ & & X \end{array} .$$

(2) *Für jede kommutative  $K$ -Algebra  $L$  liegt eine Gruppenoperation von  $G(L)$  auf  $X(L)$  vor.*

*Beweis.* Dies wird ähnlich wie Lemma 18.2 bewiesen. □

BEISPIEL 18.11. Zu einem kommutativen Ring  $K$  lässt sich die skalare Multiplikation auf dem  $K^n$  bzw. auf dem Polynomring  $R = K[X_1, \dots, X_n]$  folgendermaßen als eine Kooperation der Hopf-Algebra  $H = K[U, U^{-1}]$  zur multiplikativen Gruppe realisieren: Man definiert die Kooperation durch

$$K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K[U, U^{-1}] \otimes_K K[X_1, \dots, X_n], \quad X_i \longmapsto U \otimes X_i.$$

Ein  $K$ -Punkt von  $H \otimes_K R$  ist dabei nach Satz 17.5 durch einen  $K$ -Punkt von  $H$  und einen  $K$ -Punkt von  $R$  gegeben, also durch eine Einheit  $t \in K^\times$  und ein  $n$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$  festgelegt. Dieser wird unter der Kooperation wie gewünscht auf  $(ta_1, \dots, ta_n)$  abgebildet.