Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 15

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 15.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ multilinear und alternierend ist.

Aufgabe 15.2. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\triangle : V \times V \longrightarrow K$$

eine multilineare und alternierende Abbildung. Es seien $u, v, w \in V$. Ziehe in

$$\triangle \begin{pmatrix} u + 2v \\ v + 3w \end{pmatrix}$$

Summen und Skalare nach außen.

Aufgabe 15.3. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Abbildung

$$K^n \times K^n \longrightarrow K, \; (\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}) \longmapsto (u_1, \ldots, u_n) \circ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

multilinear ist.

Aufgabe 15.4. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Mat}_2(K) \longrightarrow K, \; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad + cb,$$

multilinear ist, aber nicht alternierend.

Aufgabe 15.5. Es sei K ein Körper. Ist die Abbildung

$$\operatorname{Mat}_2(K) \longrightarrow K, \; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ac - bd,$$

multilinear in den Zeilen? In den Spalten?

Aufgabe 15.6. Es sei K ein Körper und $m, n, p \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Transponieren von Matrizen folgende Eigenschaften besitzt (dabei seien $A, B \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$, $C \in \operatorname{Mat}_{n \times p}(K)$ und $s \in K$).

(1) $(A^t)^t = A$.
(2) $(A+B)^t = A^t + B^t$.
(3) $(sA)^t = s \cdot A^t$.
(4) $(A \circ C)^t = C^t \circ A^t$.

AUFGABE 15.7. Zeige, dass für jede Elementarmatrix E die Beziehung

$$\det E = \det E^t$$

gilt.

AUFGABE 15.8. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$. Es sei

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

der sogenannte *Dualraum* zu V. Zeige, dass auf V^* die Koordinatenfunktionen $v_1^*, \ldots, v_n^*$, die durch

$$v_j^*(v_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert sind, eine Basis von V^* bilden.

AUFGABE 15.9. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume mit Basen

$$\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m\,.$$

Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. dieser Basen durch die Matrix M beschrieben werde. Zeige, dass die *duale Abbildung*

$$W^* \longrightarrow V^*,\ f \longmapsto f \circ \varphi,$$

bzgl. der Dualbasen

$$v_1^*, \ldots, v_n^* \text{ und } w_1^*, \ldots, w_m^*$$

durch die transponierte Matrix M^t beschrieben wird.

AUFGABE 15.10. Zeige, dass man die Determinante nach jeder Zeile und nach jeder Spalte entwickeln kann.

AUFGABE 15.11. Man berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

indem man die Matrix nach allen Spalten und nach allen Zeilen entwickle.

Aufgabe 15.12. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Zeige, dass die Vektorenfamilie

$$v_1, \ldots, v_n \text{ und } iv_1, \ldots, iv_n$$

eine Basis von V, aufgefasst als reeller Vektorraum, ist.

Aufgabe 15.13. Sei $z \in \mathbb{C}$ und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, w \longmapsto zw,$$

die zugehörige Multiplikation. Bestimme die Determinante dieser Abbildung, wenn man sie als reell-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffasst.

Aufgabe 15.14. Es sei K ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}_+$, $n \leq m$. Definiere injektive Gruppenhomomorphismen

$$\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(K).$$

Aufgabe 15.15. Bestimme mittels der Leibniz-Formel die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.16. (2 Punkte)

Es sei $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$. Zeige, dass es egal ist, ob man die Determinante in $\mathbb{Q}$, in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ ausrechnet.

Aufgabe 15.17. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\triangle : V \times V \times V \longrightarrow K$$

eine multilineare und alternierende Abbildung. Es seien $u, v, w, z \in V$. Ziehe in

$$\triangle \begin{pmatrix} u + v + w \\ 2u + 3z \\ 4w - 5z \end{pmatrix}$$

Summen und Skalare nach außen.

Aufgabe 15.18. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi_i : V_i \longrightarrow K$$

($i = 1, \ldots, n$), lineare Abbildungen. Zeige, dass dann die Abbildung

$$\varphi : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow K,\ (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \varphi_1(v_1) \cdots \varphi_n(v_n),$$

multilinear ist.

Aufgabe 15.19. (3 Punkte)

Löse mit der Cramerschen Regel das inhomogene lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{Q}$)

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 3 \\ x + 5y + 7z &= 3 \\ 3x + 5y + 2z &= 4\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 15.20. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Es sei T ein weiterer K-Vektorraum. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(W, T) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V, T),\ f \longmapsto f \circ \varphi,$$

K-linear ist.

Aufgabe 15.21. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot, 1),\ M \longmapsto \det M,$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 15.22. (8 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Wir betrachten V auch als reellen Vektorraum der doppelten Dimension, worauf φ auch eine reell-lineare Abbildung ist, die wir zur Unterscheidung mit ψ bezeichnen. Zeige, dass zwischen der komplexen Determinante und der reellen Determinante die Beziehung

$$|\det \varphi|^2 = \det \psi$$

besteht.