**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2009/2010**

# Vorkurs Mathematik

## Arbeitsblatt 3

Aufgabe 3.1. Skizziere ein Inklusionsdiagramm für sämtliche Teilmengen einer dreielementigen Menge.

Aufgabe 3.2. Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen $25, 30, 36$ sowie all ihrer positiven Teiler.

Aufgabe 3.3. Finden Sie in Ihrem Alltagsleben möglichst viele Relationen. (Suchen Sie auch in Ihrem (Zweit-)Studienfach.)

Aufgabe 3.4. Es sei $S$ die Menge der Städte und $A$ die Menge der Autobahnen und $L \subseteq S \times A$ die in Beispiel 3.2 beschriebene Relation.

Beschreibe formal die Menge $T$ derjenigen Städte, die an mindestens einer Autobahn liegen.

Beschreibe formal die Menge $U$ derjenigen Städte, die an mindestens zwei Autobahnen liegen.

Interpretiere die Aussage

$$\forall s_1 \forall s_2 \exists a (s_1 La \wedge s_2 La)\,,$$

wobei $s_1$ und $s_2$ aus $T$ seien. Ist die Aussage wahr?

Formuliere formal die Aussage, dass zwei Städte stets durch maximal zwei Autobahnen miteinander verbunden sind (man darf annehmen, dass jedes Autobahnkreuz an mindestens einer Stadt liegt).

Aufgabe 3.5. Erstelle eine Tabelle für die Inzidenzrelation zu einer $0, 1, 2$ und 3-elementigen Menge.

Aufgabe 3.6. Es sei $M$ eine $n$-elementige Menge. Bestimme die Anzahl der Elemente in der Inzidenzrelation zu $M$.

Aufgabe 3.7. Es sei $M$ eine Menge und $P$ die Potenzmenge von $M$. Betrachte die Relation $T$ auf $P$, die durch

$$T(A,B) \text{ genau dann, wenn } A \subseteq B$$

gegeben ist (dabei sind also $A$ und $B$ Teilmengen von $M$). Bestimme die Anzahl der Elemente dieser Relation, wenn $M$ $n$ Elemente besitzt.

Aufgabe 3.8. Es sei $M$ eine Menge und $P$ die Potenzmenge von $M$. Betrachte die Relation $D$ auf $P$, die durch

$$D(A,B) \text{ genau dann, wenn } A \cap B = \emptyset$$

gegeben ist (dabei sind also $A$ und $B$ Teilmengen von $M$). Bestimme die Anzahl der Elemente dieser Relation, wenn $M$ $n$ Elemente besitzt.

Aufgabe 3.9. Beschreibe, wie sich die Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch* und *antisymmetrisch* einer Relation $R$ in der Relationstabelle zu $R$ widerspiegeln.

Aufgabe 3.10. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es? Wie kann man einfach charakterisieren, ob zwei Flöhe zur gleichen Population gehören oder nicht?

Aufgabe 3.11. Betrachte die Schachfiguren Turm, Läufer, Pferd und Esel zusammen mit ihren erlaubten Zügen auf einem $8 \times 8$-Schachbrett. Ein Esel darf dabei pro Zug einen Doppelschritt nach vorne, nach hinten, nach rechts oder nach links machen. Jede dieser Figuren definiert eine Äquivalenzrelation auf den 64 Feldern, indem zwei Felder als äquivalent angesehen werden, wenn das eine Feld von dem anderen Feld aus mit dieser Figur in endlich vielen Zügen erreichbar ist. Beschreibe für jede dieser Schachfiguren die zugehörige Äquivalenzrelation und ihre Äquivalenzklassen. Wie sieht es auf einem $3 \times 3$-Schachbrett aus?

Aufgabe 3.12. Sei $M$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M$ mit den Äquivalenzklassen $[x]$. Es sei $I$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Zeige folgende Aussagen.

(1) Es ist $x \sim y$ genau dann, wenn $[x] = [y]$ ist, und dies gilt genau dann, wenn $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.
(2) $M = \bigcup_{x \in I} [x]$ ist eine disjunkte Vereinigung.

Aufgabe 3.13. Es sei $M$ eine Menge von Aussagenvariablen und $S$ die damit definierte formale Sprache, also die Menge aller formalen Ausdrücke, die man von $M$ ausgehend mittels der Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ und mit Klammern „sinnvoll“ basteln kann. Zeige, dass die Beziehung

$$s \sim t \text{ falls } s \leftrightarrow t \text{ eine Tautologie ist},$$

eine Äquivalenzrelation auf $S$ definiert. Zeige, dass sowohl alle Tautologien als auch alle Kontradiktionen eine Äquivalenzklasse bilden. Wie viele Äquivalenzklassen besitzt diese Äquivalenzrelation, falls $M$ $n$ Elemente besitzt?

Aufgabe 3.14. Wir studieren die Relation „kann gut leiden“ in verschiedenen Dreier-WGs, die wir durch Relationstabellen ausdrücken, wobei in der Leitspalte das grammatische Subjekt steht. Welche WGs sind von ihrer Kann-gut-leiden-Relation her als gleichartig anzusehen, welche als verschieden? Wie sehen die Begründungen dafür aus? Man gebe einzelnen WG-Typen einen passenden Namen. Wie viele WG-Typen gibt es überhaupt? (Zur Einstimmung auf die letzte Frage kann man die Situation bei einer Zweier-WG betrachten. Mit welcher Strategie kann man die Beantwortung dieser Frage geschickt auf mehrere Leute verteilen?[1])

| | Anna | Berta | Hans |
|---|---|---|---|
| Anna | | x | x |
| Berta | x | x | |
| Hans | x | x | x |

| | Andrea | Bernd | Heinz |
|---|---|---|---|
| Andrea | x | | |
| Bernd | | x | |
| Heinz | | | x |

| | Anja | Ben | Horst |
|---|---|---|---|
| Anja | x | x | x |
| Ben | x | x | x |
| Horst | x | x | x |

| | Hinz | Kunz | Schlonz |
|---|---|---|---|
| Hinz | x | x | x |
| Kunz | | x | |
| Schlonz | x | x | x |

[1] Gruppenarbeit muss nicht bedeuten, dass alle über dem gleichen Thema brüten; zur Gruppenarbeit gehört auch zu erkennen, welche Fragen in unabhängige Teilfragen aufspaltbar sind.

| | Hänsel | Gretel | Hexe |
|---|---|---|---|
| Hänsel | x | x | |
| Gretel | x | x | |
| Hexe | | | x |

| | Oma | Wolf | Rotkäppchen |
|---|---|---|---|
| Oma | x | | x |
| Wolf | | x | |
| Rotkäppchen | x | | x |

| | Malte | Laurids | Brigge |
|---|---|---|---|
| Malte | x | | |
| Laurids | x | x | x |
| Brigge | x | x | x |

| | Rainer | Maria | Rilke |
|---|---|---|---|
| Rainer | x | x | |
| Maria | x | x | |
| Rilke | | | |

| | Os | Na | Brück |
|---|---|---|---|
| Os | | x | |
| Na | x | x | x |
| Brück | x | x | x |

| | Darius | Barbara | Felapton |
|---|---|---|---|
| Darius | | | x |
| Barbara | x | x | x |
| Felapton | x | x | x |

| | Jan | Jens | Jennifer |
|---|---|---|---|
| Jan | | | |
| Jens | | | |
| Jennifer | | | |

| | Hase | Fuchs | Igel |
|---|---|---|---|
| Hase | | x | |
| Fuchs | | | x |
| Igel | x | | |

Aufgabe 3.15. Eine (Fußball-)Spielgruppe bei einer Europa- oder Weltmeisterschaft besteht aus vier Mannschaften, und jede spielt gegen jede. Ein Spiel kann unentschieden oder mit einem Sieg für eine der beiden Mannschaften enden. Wir interessieren uns für die diskrete Struktur einer Spielgruppe, die man durch einen Graphen beschreiben kann, wobei man einen Sieg von $A$ über $B$ durch einen Pfeil von $A$ nach $B$ (und ein Unentschieden durch keine Verbindung) ausdrücken kann.

Wie viele verschiedene Typen von Spielgruppen (also wie viele Gewinndiagramme) gibt es?