

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 23

Übungsaufgaben

AUFGABE 23.1. Zeige, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen (also die Diagonalrelation in \mathbb{N}^2) durch den Ausdruck $x = y$ in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentierbar ist.

AUFGABE 23.2. Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ das Axiomensystem eines kommutativen Halbringes. Zeige, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen (also die Diagonalrelation in \mathbb{N}^2) durch den Ausdruck $x = y$ in Γ nicht repräsentiert wird.

AUFGABE 23.3. Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ das Axiomensystem eines kommutativen Halbringes. Zeige, dass Γ keine Repräsentierungen erlaubt.

Insbesondere erlauben die erststufigen Peano-Axiome ohne das Induktionsschema keine Repräsentierungen.

AUFGABE 23.4. Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei

$$\alpha := \exists y(y + \cdots + y = x),$$

wobei k -mal der Summand y vorkommt. Zeige, dass $\mathbb{N}k \subseteq \mathbb{N}$, also die Menge der Vielfachen von k , in der erststufigen Peano-Arithmetik durch α repräsentiert wird.

AUFGABE 23.5. Zeige, dass die Menge der Primzahlen in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentiert werden kann.

AUFGABE 23.6. Es sei

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

eine Polynomfunktion mit $f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass f durch den Ausdruck $y = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentiert wird.