

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 4

AUFGABE 4.1. Es sei das arithmetische Alphabet $\{0, 1, +, \cdot\}$ zusammen mit der Variablenmenge $\{x, y\}$ gegeben. Interpretiere den Term

$$((0 + 1) + x) \cdot (1 + (y + 1))$$

unter den folgenden Interpretationen.

(1) $M = \mathbb{N}$ mit der Standardinterpretation und der Variablenbelegung $I(x) = 5$ und $I(y) = 3$.

(2) $M = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ mit der Standardinterpretation

$$I(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und der üblichen Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation und der Variablenbelegung $I(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $I(y) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(3) $M = \mathbb{N}$, mit

$$I(0) = 1, I(1) = 4, I(x) = 2, I(y) = 1,$$

und wo $+$ als Multiplikation und \cdot als Addition interpretiert wird.

(4) $M = \mathbb{Z}$, mit

$$I(0) = 5, I(1) = -1, I(x) = 0, I(y) = 0,$$

und wo sowohl $+$ als auch \cdot als Subtraktion interpretiert werden.

(5) $M =$ Potenzmenge von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit

$$I(0) = \emptyset, I(1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, I(x) = \emptyset, I(y) = \{2, 4\},$$

und wo $+$ als \cup und \cdot als \cap interpretiert wird.

AUFGABE 4.2. Es sei das arithmetische Alphabet $\{0, 1, +, \cdot\}$ zusammen mit der Variablenmenge $\{x, y\}$ gegeben. Interpretiere den Ausdruck

$$\forall x \exists y (x = y + y \vee x + 1 = y + y)$$

unter den in Aufgabe 4.1 angeführten Interpretationen und überprüfe die Gültigkeit.

AUFGABE 4.3. Erstelle einen prädikatenlogischen Ausdruck p , der in einer Struktur genau dann gilt, wenn die Grundmenge der Struktur genau 7 Elemente besitzt.