

## Einführung in die mathematische Logik

### Arbeitsblatt 4

AUFGABE 4.1. Es sei das arithmetische Alphabet  $\{0, 1, +, \cdot\}$  zusammen mit der Variablenmenge  $\{x, y\}$  gegeben. Interpretiere den Term

$$((0 + 1) + x) \cdot (1 + (y + 1))$$

unter den folgenden Interpretationen.

(1)  $M = \mathbb{N}$  mit der Standardinterpretation und der Variablenbelegung  $I(x) = 5$  und  $I(y) = 3$ .

(2)  $M = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$  mit der Standardinterpretation

$$I(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und der üblichen Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation und der Variablenbelegung  $I(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  und  $I(y) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

(3)  $M = \mathbb{N}$ , mit

$$I(0) = 1, I(1) = 4, I(x) = 2, I(y) = 1,$$

und wo  $+$  als Multiplikation und  $\cdot$  als Addition interpretiert wird.

(4)  $M = \mathbb{Z}$ , mit

$$I(0) = 5, I(1) = -1, I(x) = 0, I(y) = 0,$$

und wo sowohl  $+$  als auch  $\cdot$  als Subtraktion interpretiert werden.

(5)  $M =$  Potenzmenge von  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  mit

$$I(0) = \emptyset, I(1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, I(x) = \emptyset, I(y) = \{2, 4\},$$

und wo  $+$  als  $\cup$  und  $\cdot$  als  $\cap$  interpretiert wird.

AUFGABE 4.2. Es sei das arithmetische Alphabet  $\{0, 1, +, \cdot\}$  zusammen mit der Variablenmenge  $\{x, y\}$  gegeben. Interpretiere den Ausdruck

$$\forall x \exists y (x = y + y \vee x + 1 = y + y)$$

unter den in Aufgabe 4.1 angeführten Interpretationen und überprüfe die Gültigkeit.

AUFGABE 4.3. Erstelle einen prädikatenlogischen Ausdruck  $p$ , der in einer Struktur genau dann gilt, wenn die Grundmenge der Struktur genau 7 Elemente besitzt.