Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 29

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Sei $P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n_K$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass es eine offene affine Umgebung $U \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$ gibt derart, dass P in diesem affinen Raum dem Nullpunkt entspricht.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Seien $m+1$ homogene Polynome $F_0, \ldots, F_m$ in $n+1$ Variablen gegeben, die alle den gleichen Grad d besitzen. Zeige, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{P}^n_K$ gibt, auf der die Polynome einen Morphismus

$$\mathbb{P}^n_K \supseteq U \longrightarrow \mathbb{P}^m_K$$

definieren.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Definiere zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ das Potenzieren $x \mapsto x^n$ als Morphismus der projektiven Gerade auf sich selbst. Wie sehen die Fasern unter diesem Morphismus aus?

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Sei $P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n_K$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass die Projektion des $\mathbb{P}^n_K$ auf $\mathbb{P}^{n-1}_K$ mit Zentrum P durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, also durch die Abbildung

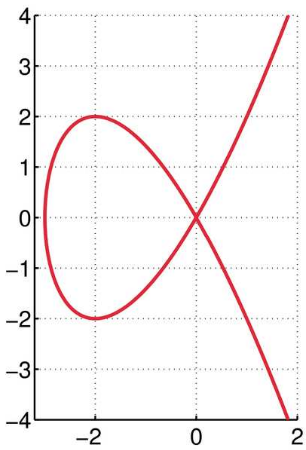
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass eine ebene projektive Kurve mit jeder projektiven Geraden in der projektiven Ebene einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Bestimme für die durch $V(X^3 + 3X^2 - Y^2)$ gegebene *Tschirnhausen Kubik* die Singularitäten unter Berücksichtigung der unendlich fernen Punkte. Bestimme die Tangenten in den Singularitäten und in den unendlich fernen Punkten.



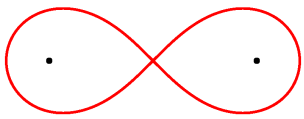
Die Tschirnhausen Kubik

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Bestimme für das durch $V(X^3 + Y^3 - 3XY)$ definierte Kartesische Blatt die unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ und berechne die Multiplizität und die Tangenten in diesen Punkten.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Bestimme für die durch $V((X^2 + Y^2)^2 - X^2 + Y^2)$ gegebene Lemniskate von Bernoulli die Singularitäten sowie die unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Berechne in all diesen Punkten die Multiplizität und die Tangenten.



Die Lemniskate von Bernoulli

Aufgabe 9. (5 Punkte)

Man gebe für die projektive Lemniskate von Bernoulli

$$V_+((X^2 + Y^2)^2 - Z^2X^2 + Z^2Y^2) \subset \mathbb{P}^2_K$$

einen surjektiven Morphismus auf eine projektive Quadrik an. Wie viele Punkte der Lemniskate werden dabei auf einen Punkt der Quadrik abgebildet?

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei X eine irreduzible quasiprojekive Varietät mit Funktionenkörper $L = K(X)$. Es seien U und $U_i, i \in I$, offene Teilmengen mit $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Zeige, dass

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = \bigcap_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O})$$

ist, wobei der Durchschnitt in L genommen wird.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und $\mathbb{P}^n_K$ der projektive Raum. Zeige, dass die Konstanten die einzigen globalen algebraischen Funktionen sind, d.h. es gilt

$$\Gamma(\mathbb{P}^n_K, \mathcal{O}) = K\,.$$

Bemerkung: Diese Aussage gilt für jede zusammenhängende projektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper.