Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 17

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 17.1. Es sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ seien Ideale. Zeige die R-Algebraisomorphie

$$R/\mathfrak{a} \otimes_R R/\mathfrak{b} \;=\; R/\left(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\right).$$

Aufgabe 17.2. Es sei R ein kommutativer Ring und $S, T \subseteq R$ seien multiplikative Systeme. Zeige die R-Algebraisomorphie

$$R_S \otimes_R R_T \;=\; R_{S \cdot T}.$$

Aufgabe 17.3. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass $L \otimes_K L$ kein Körper sein muss.

Aufgabe 17.4. Es sei

$$\varphi \colon R \longrightarrow S$$

ein ganzer Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen und $R \to R'$ ein weiterer Ringhomomorphismus. Zeige, dass auch

$$\varphi' \colon R' \longrightarrow R' \otimes_R S,\; f \longmapsto f \otimes 1,$$

ganz ist.

Aufgabe 17.5. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme zur Spektrumsabbildung

$$\varphi^* \colon \operatorname{Spek}\left(K[X]\right) \longrightarrow \operatorname{Spek}\left(K[X]\right)$$

zum Ringhomomorphismus

$$\varphi \colon K[X] \longrightarrow K[X],\; X \longmapsto X^n,$$

die Fasern zu jedem Punkt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}\left(K[X]\right)$. Worin unterscheiden sich die Fasern, welche Eigenschaften sind für jede Faser gleich? Wie viele Isomorphietypen der Fasern gibt es bei K algebraisch abgeschlossen?

Aufgabe 17.6. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und $L = K(X)$ sein Quotientenkörper. Bestimme die L-wertigen Punkte von $K[X] \otimes_K K[X]$. Welcher Punkt entspricht der (zweifach genommenen) natürlichen Inklusion $K[X] \subseteq K(X)$?

Aufgabe 17.7. Es sei R ein kommutativer Ring und es seien $A = \bigoplus_{d \in D} A_d$ und $B = \bigoplus_{e \in E} B_e$ kommutative graduierte R-Algebren, wobei D und E kommutative Gruppen seien. Zeige, dass $A \otimes_R B$ in natürlicher Weise eine $D \times E$-Graduierung trägt.

Aufgabe 17.8. Es sei R ein kommutativer Ring und es seien A und B kommutative R-Algebren. Es seien H und G Gruppen, wobei die Gruppe H auf A und die Gruppe G auf B jeweils als Gruppe von R-Algebrahomomorphismen operiere. Zeige, dass dann eine natürliche Operation der Produktgruppe $H \times G$ auf $A \otimes_R B$ vorliegt.

Aufgabe 17.9. Es sei G eine Gruppe, die auf einer kommutativen R-Algebra A als Gruppe von R-Algebrahomomorphismen operiere. Zeige, dass G in natürlicher Weise auch auf den Tensorprodukten $A \otimes_R A$, $A \otimes_R A \otimes_R A$, etc. operiert.

Man überlege sich auch, wo die vorstehende Konstruktion im Laufe der Vorlesung vorkam (ohne dass explizit das Tensorprodukt verwendet wurde).

Aufgabe 17.10. Es sei R ein kommutativer Ring und seien A, B kommutative R-Algebren. Es sei G eine Gruppe, die auf R, A, B als Gruppe von Ringautomorphismen operiere, wobei die Operationen mit den Strukturhomomorphismen verträglich seien.

(1) Zeige, dass G in natürlicher Weise auf $A \otimes_R B$ operiert.
(2) Zeige, dass es einen Ringhomomorphismus
$$A^G \otimes_{R^G} B^G \longrightarrow (A \otimes_R B)^G$$
gibt.
(3) Man gebe ein Beispiel, das zeigt, dass der Ringhomomorphismus aus (2) kein Isomorphismus sein muss.

Zu einem Körper K, zwei Mengen X, Y und Funktionen $f \colon X \to K$ und $g \colon Y \to K$ schreiben wir $f \cdot g$ für die Abbildung $X \times Y \to K$, $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$.

Aufgabe 17.11. Es sei K ein Körper und seien X und Y endliche Mengen. Zeige, dass man jede Funktion

$$h\colon X \times Y \longrightarrow K$$

in der Form

$$h = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i$$

mit Funktionen $f_i\colon X \to K$ und $g_i\colon Y \to K$ schreiben kann.

Aufgabe 17.12. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man nicht jede Funktion

$$h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow K$$

in der Form

$$h = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i$$

mit Funktionen $f_i\colon \mathbb{N} \to K$ und $g_i\colon \mathbb{N} \to K$ schreiben kann.

Aufgabe 17.13. Zeige, dass man nicht jede stetige Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in der Form

$$h = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i$$

mit stetigen Funktionen $f_i, g_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben kann.

Aufgabe 17.14. Wo wird in Beispiel 17.8 die Endlichkeit der Gruppe verwendet?

Aufgabe 17.15. Es sei K ein kommutativer Ring. Zeige, dass auf dem Polynomring $K[X]$ durch

$$\Delta\colon K[X] \longrightarrow K[X] \otimes_K K[X] \cong K[X,Y],\ X \longmapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X = X + Y,$$

durch

$$K[X] \longrightarrow K,\ X \longmapsto 0,$$

und durch

$$K[X] \longrightarrow K[X],\ X \longmapsto -X,$$

eine Hopf-Struktur erklärt wird.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.16. (3 Punkte)

Es seien M und N kommutative Monoide und R ein kommutativer Ring. Zeige die R-Algebraisomorphie

$$R[M \times N] \cong R[M] \otimes_R R[N].$$

Aufgabe 17.17. (8 Punkte)

Zeige, dass man die Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2},$$

nicht in der Form

$$h = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i$$

mit stetigen Funktionen $f_i, g_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben kann.

Aufgabe 17.18. (3 Punkte)

Es sei K ein kommutativer Ring. Zeige, dass auf $K[X,X^{-1}] \cong K[X]_X$ durch

$$\Delta : K[X,X^{-1}] \longrightarrow K[X,X^{-1}] \otimes_K K[X,X^{-1}] \cong K[X,X^{-1},Y,Y^{-1}],$$
$$X \longmapsto X \otimes 1 \cdot 1 \otimes X = X \cdot Y,$$

durch

$$K[X,X^{-1}] \longrightarrow K,\, X \longmapsto 1,$$

und durch

$$K[X,X^{-1}] \longrightarrow K[X,X^{-1}],\, X \longmapsto X^{-1},$$

eine Hopf-Struktur erklärt wird.