Invariantentheorie

Arbeitsblatt 21

Aufwärmaufgaben

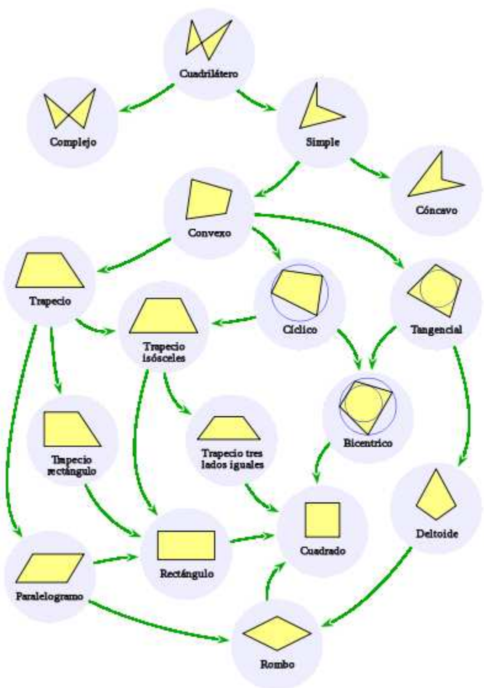
Aufgabe 21.1. Bestimme die Ordnung der ebenen Drehung um 291 Grad.

Die nächste Aufgabe verwendet die sogenannte *Kleinsche Vierergruppe*. Dies ist einfach die Produktgruppe $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$.

Aufgabe 21.2. Zeige, dass die Diedergruppe D_2 isomorph zur Kleinschen Vierergruppe ist.

Aufgabe 21.3. Zeige, dass die Diedergruppe D_3 isomorph zur Permutationsgruppe S_3 ist.

Aufgabe 21.4. Es sei $V = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ ein Viereck in der Ebene. Bestimme die möglichen eigentlichen Symmetriegruppen von V.



Aufgabe 21.5. Es sei $V = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ ein Viereck in der Ebene. Bestimme die möglichen Symmetriegruppen (die auch die uneigentlichen Symmetrien beinhalten) von V.

Aufgabe 21.6. In die Erdkugel soll ein Würfel eingeschrieben werden derart, dass Osnabrück ein Eckpunkt ist und sich ein weiterer benachbarter Eckpunkt in südlicher Richtung von Osnabrück befindet. Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte dieses Würfels. Wie viele Eckpunkte befinden sich im Meer?

Aufgabe 21.7. Führe folgendes Gedankenexperiment durch: Gegeben sei eine Kugeloberfläche aus Metall und n gleiche Teilchen mit der gleichen positiven Ladung. Die Teilchen stoßen sich also ab. Diese Teilchen werden auf die Kugeloberfläche gebracht, wobei sie sich nach wie vor gegenseitig abstoßen, aber auf der Kugel bleiben. Welche Konfiguration nehmen die Teilchen ein? Müsste sich nicht „aus physikalischen Gründen“ eine „gleichverteilte“ Konfiguration ergeben, in der alle Teilchen gleichberechtigt sind? Müsste es nicht zu je zwei Teilchen P, Q eine Kugelbewegung geben, die eine Symmetrie der Konfiguration ist und die P in Q überführt?

Aufgabe 21.8. Sei A_n eine alternierende Gruppe mit $n \geq 4$. Zeige, dass A_n nicht kommutativ ist.

Aufgabe 21.9. Zeige, dass die Kleinsche Vierergruppe zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe S_4 isomorph ist. Wie sieht eine Realisierung als Untergruppe der Würfelgruppe aus?

Aufgabe 21.10. Zeige, dass jede gerade Permutation $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, ein Produkt aus Dreierzykeln ist.

Aufgabe 21.11. Betrachte die Wirkung der Tetraedergruppe auf den vier Eckpunkten eines Tetraeders. Zeige, dass dies eine Isomorphie zwischen der Tetraedergruppe und der alternierenden Gruppe A_4 ergibt.

Aufgabe 21.12. Sei $G \subseteq \mathrm{O}_2$ eine endliche Untergruppe der (eigentlichen und uneigentlichen) Bewegungsgruppe der reellen Ebene, und sei $G \not\subseteq \mathrm{SO}_2$. Zeige, dass es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \mathbb{Z}/(2)$$

gibt, dessen Kern eine zyklische Gruppe ist. Schließe, dass die Ordnung von G gerade ist.

Aufgabe 21.13. Betrachte die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, 0)$ als kommutative Gruppe. Es sei $G \subseteq \mathbb{Q}$ eine endlich erzeugte Untergruppe. Zeige, dass G zyklisch ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.14. (2 Punkte)

Wie viele Elemente besitzt die von der Drehung um 51 Grad, von der Drehung um 99 Grad und von der Siebteldrehung erzeugte Untergruppe der Drehgruppe SO_2?

Aufgabe 21.15. (3 Punkte)

Betrachte ein regelmäßiges n-Eck und die zugehörige Gruppe der (eigentlichen und uneigentlichen) Symmetrien, also die Diedergruppe D_n. Beschreibe D_n als Untergruppe der Permutationsgruppe S_n. Durch welche Permutationen wird sie erzeugt? Für welche n handelt es sich um eine Untergruppe der alternierenden Gruppe?

Die folgende Aufgabe verwendet den topologischen Begriff der Dichtheit.

Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ heißt *dicht*, wenn es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ Elemente $t \in T$ gibt mit $d(t, x) < \epsilon$.

Aufgabe 21.16. (3 Punkte)

Sei H eine (additive) Untergruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zeige, dass entweder $H = \mathbb{Z}a$ mit einer eindeutig bestimmten nicht-negativen reellen Zahl a ist, oder aber H dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 21.17. (10 Punkte)

Schreibe eine Computeranimation, die zeigt, wie sich fünf auf einer Kugeloberfläche platzierte Teilchen mit der gleichen positiven Ladung aufgrund ihrer gegenseitigen Abstoßung bewegen (wobei sie aber auf der Kugeloberfläche bleiben), und welche Endposition (?) sie einnehmen.

Abbildungsverzeichnis