

Mathematik für Anwender II**Arbeitsblatt 40****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 40.1. Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 40.2. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

über \mathbb{C} .

AUFGABE 40.3. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$ -Matrix über K . Zeige, dass für jedes $\lambda \in K$ die Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M)$$

gilt.¹

AUFGABE 40.4. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$ -Matrix über K . Wie findet man die Determinante von M im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

AUFGABE 40.5. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ und $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(\varphi)$ ist.

¹Die Hauptschwierigkeit bei dieser Aufgabe ist vermutlich zu erkennen, dass man hier wirklich was zeigen muss.

²Der Ausdruck $P(\varphi)$ bedeutet, dass man die lineare Abbildung φ in das Polynom P einsetzt. Dabei muss man X^n als φ^n , also als die n -fache Hintereinanderschaltung von φ mit sich selbst, interpretieren, die Addition wird zur Addition von linearen Abbildungen, u.s.w.

AUFGABE 40.6.*

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2+i \\ 0 & i & 1+i \\ 0 & 0 & -1+2i \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

- Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A .
- Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.
- Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.

AUFGABE 40.7. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Berechne:

- die Eigenwerte von A ;
- die zugehörigen Eigenräume;
- die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
- eine Matrix $C \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

AUFGABE 40.8. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $1 \leq m \leq n$. Man gebe Beispiele für $n \times n$ -Matrizen M derart, dass a ein Eigenwert zu M ist mit der algebraischen Vielfachheit n und der geometrischen Vielfachheit m .

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 40.9. (2 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 40.10. (3 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

über \mathbb{C} .

AUFGABE 40.11. (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Berechne:

- (1) die Eigenwerte von A ;
- (2) die zugehörigen Eigenräume;
- (3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
- (4) eine Matrix $C \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

AUFGABE 40.12. (4 Punkte)

Bestimme für jedes $\lambda \in \mathbb{Q}$ die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 40.13. (4 Punkte)

Zeige, dass das charakteristische Polynom der sogenannten *Begleitmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gleich

$$\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

ist.

4

AUFGABE 40.14. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ mindestens einen Eigenvektor besitzt.